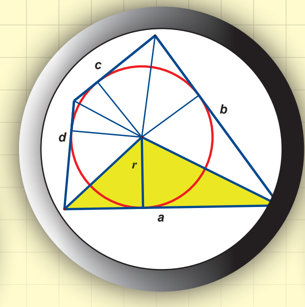
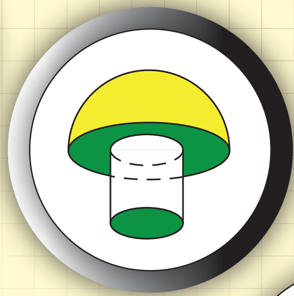
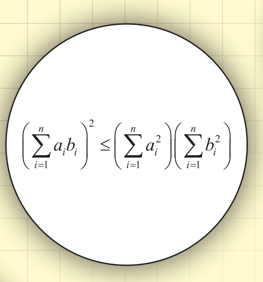
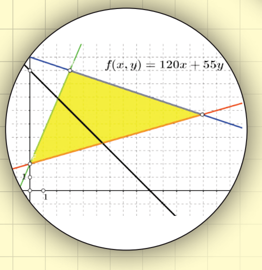
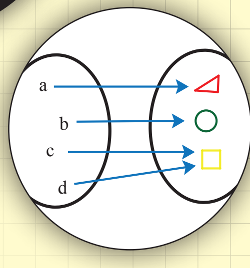


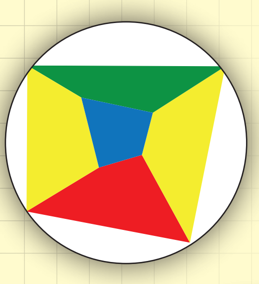


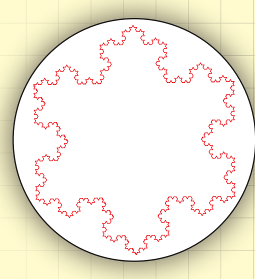


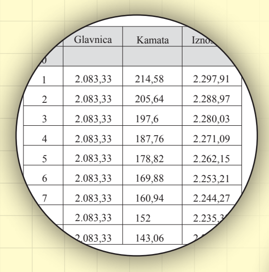


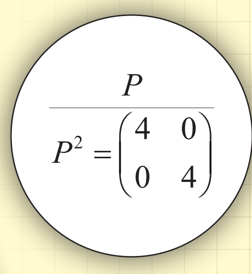


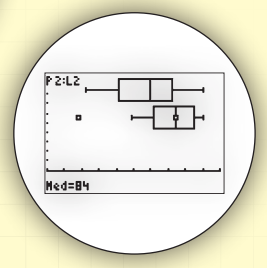
Geometrija 1
Geometrija 2

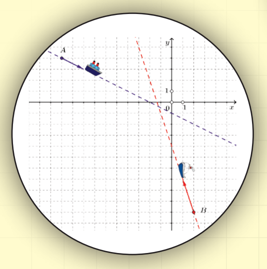












1. vježbenica

Sadržaj ove publikacije/emitiranog materijala isključiva je odgovornost XV. gimnazije

Europska unija
Ulaganje u budućnost

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

ESF RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda

1. Geometrija 1

1.1. Karakteristične točke trokuta 1

Što ćemo raditi?

Konstruirat ćete srednjicu, simetralu dužine, simetralu kuta i karakteristične točke trokuta. Istraživat ćete svojstva navedenih objekata.

U čemu je problem?

Prisjetite se definicija srednjice trokuta, težišnice trokuta, simetrale dužine, simetrale kuta, visine trokuta. Budući da znate definiciju navedenih objekata, lako ćete ih konstruirati. To možete **učiniti na tradicionalan način ili korištenjem računala i programa dinamične geometrije.** Cilj današnje aktivnosti jest istraživanje svojstava navedenih objekata i za to preferiramo drugi način.

Uočena svojstva iskazat ćete kao poučke, a njihovu ispravnost dokazati.

Potražite pomoć tehnologije.

Srednjica trokuta

i. Nacrtajte trokut, konstruirajte jednu njegovu srednjicu. Izmjerite duljinu srednjice i duljine stranica trokuta.

ii. Mijenjajte položaj vrhova trokuta tako da dobijete različite vrste trokuta: s obzirom na kutove – šiljastokutni, pravokutni i tupokutni i s obzirom na stranice – raznostranični, jednakokračni, jednakostranični. Promatrajte položaj i duljinu srednjice. Usporedite ju s položajem i duljinama stranica trokuta. Koja svojstva uočavate? Vrijede li u svakom slučaju uočena svojstva?

iii. Usporedite svoja zapažanja sa zapažanjima svojih kolega. Izrecite i zapišite poučak o srednjici trokuta.

Težište trokuta

Nacrtajte trokut, konstruirajte sve tri težišnice. Mijenjajte položaj vrhova trokuta.

i. Sijeku li se težišnice?

ii. Koliko je sjecišta težišnica u svim primjerima?

iii. Kako ćemo zvati sjecište težišnica?

iv. Mjerite udaljenost sjecišta težišnica do jednog vrha i do polovišta njemu nasuprotne stranice.

v. Koje svojstvo uočavate?

vi. Usporedite svoja zapažanja sa zapažanjima svojih kolega. Izrecite i zapišite poučak o težištu trokuta.

Središte opisane kružnice

Nacrtajte dužinu $\overline{AB}$ i konstruirajte njezinu simetralu. Nacrtajte točku T na simetrali i mjerite udaljenost točke T do točke A i B. Mijenjajte položaj točke T. Koje svojstvo uočavate? Izrecite i zapišite poučak o simetrali dužine.

Nacrtajte trokut i konstruirajte sve tri simetrale stranica.

i. Mijenjajte položaj vrhova trokuta i promatrajte simetrale.

ii. Koje svojstvo uočavate?

iii. Kakve su međusobno udaljenosti sjecišta simetrala stranica do vrhova trokuta? Što je onda sjecište simetrala stranica?

iv. Usporedite svoja zapažanja sa zapažanjima svojih kolega. Izrecite i zapišite poučak o središtu trokutu opisane kružnice.

v. Opišite kružnicu trokutu.

Središte upisane kružnice

Nacrtajte kut $\angle AOB$ i konstruirajte simetralu kuta. Nacrtajte točku T na simetrali i mjerite udaljenost točke T do krakova kuta. Mijenjajte položaj točke T. Koje svojstvo uočavate? Izrecite i zapišite poučak o simetrali kuta.

Nacrtajte trokut i konstruirajte sve tri simetrale unutarnjih kutova.

i. Mijenjajte položaj vrhova trokuta i promatrajte simetrale.

ii. Koje svojstvo uočavate?

iii. Kakve su međusobno udaljenosti sjecišta simetrala do stranica trokuta? Što je onda sjecište simetrala kutova?

iv. Usporedite svoja zapažanja sa zapažanjima svojih kolega. Izrecite i zapišite poučak o središtu trokutu upisane kružnice.

v. Upišite kružnicu trokutu.

Ortocentar

Nacrtajte trokut. Konstruirajte visinu iz vrha *A*. Ima li svaki trokut visinu iz vrha *A*? Mijenjajte položaj vrha *B* tako da dobijete šiljastokutni, pravokutni, tupokutni trokut. Jeste li dobro konstruirali visinu, postoji li ona na slici u svakom trokutu? Ako niste i visina nestaje u nekim položajima, razmislite kako pravilno konstruirati visinu.

Konstruirajte sve tri visine.

Mijenjajte položaj vrhova trokuta. Sijeku li se u svakom slučaju visine? Promotrite slučajeve tupokutnih trokuta s tupim kutom pri bilo kojem vrhu trokuta.

i. Kako ćete definirati visinu trokuta?

ii. Što možete reći o pravcima na kojima leže visine?

iii. Gdje se nalazi sjecište pravaca na kojima leže visine?

iv. Kako ćemo nazvati sjecište tih pravaca?

v. Usporedite svoja zapažanja sa zapažanjima svojih kolega. Izrecite i zapišite poučak o ortocentru trokuta.

Kako bi to riješila teorija?

Koristeći materijale u prilogu, dokažite poučak o srednjici trokuta.

Dokažite poučak o simetrali dužine. Za dokaz navedenog svojstva valja istaknuti dva trokuta i uočiti njihovu sukladnost. Vrijedi li obrat poučka – ako je neka točka jednako udaljena od krajnjih točaka dužine, onda se ona nalazi na simetrali dužine? Dokažite.

Dokažite poučak o simetrali kuta. Za dokaz navedenog svojstva valja istaknuti dva trokuta i uočiti njihovu sukladnost. Vrijedi li obrat poučka? Izrecite i zapišite obrat poučka. Dokažite ga.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Kurnik, M.; Pavković, B.; Zorić, Ž. 2006. *Matematika 1, udžbenik za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

1.2. Karakteristične točke trokuta 2

Što ćemo raditi?

Pomoću programa dinamične geometrije konstruirat ćete karakteristične točke trokuta: središte trokutu opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar i primijeniti konstrukcije u zadatcima.

U čemu je problem?

Kako konstruirati središte trokutu opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar? Ovisi li položaj tih točaka o vrsti trokuta?

Kako to izgleda?

- Podijelite se u pet skupina.
- Svaka skupina konstruira jednu vrstu trokuta: jednakostranični, jednakokračni, šiljastokutni raznostranični, pravokutni i tupokutni (slučajan odabir).
- Konstruirajte četiri karakteristične točke za svoj trokut.

Možete li pretpostaviti?

Hoće li se položaji točaka razlikovati u pojedinim skupinama?

Napravite model.

Upišite u tablicu gdje se nalazi pojedina točka: unutar trokuta, na stranici trokuta, u vrhu trokuta ili izvan trokuta.

Vrsta trokuta	Ortocentar O	Težište T	Središte opisane kružnice S	Središte upisane kružnice U
jednakostranični				
jednakokračni				
šiljastokutni				
pravokutni				
tupokutni				

Potražite pomoć tehnologije.

Mijenjajte oblik trokuta i promatrajte položaje karakterističnih točaka trokuta.

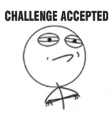
Kako bi to riješila teorija?

Koje su točke uvijek unutar trokuta?

Koje su točke i u kojem trokutu na stranici trokuta, vrhu trokuta, a koje izvan trokuta?

U kojem su trokutu sve **četiri** točke ista točka?

Koje tri točke leže na istom pravcu u svakom trokutu?



Možemo li više?

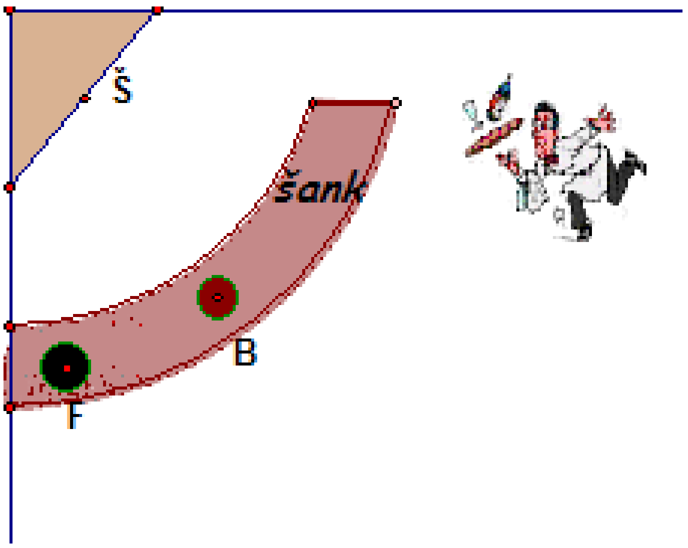
Dokažite da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1.

Primijenite naučeno.

I. Vlasnik kafića gospodin Triangl renovira svoj kafić Trokutić i treba vašu pomoć.
Naručio je stolove u obliku trokuta, s jednom nogom. Stolovi su dopremljeni u dijelovima (ploče stola i noge).

1. Konstruirajte mjesto na plohi stola u kojem treba pričvrstiti nogu kako bi stol bio u ravnoteži.
2. Ploče stolova treba i obojiti. Gospodin Triangl podijelio je stol na šest trokuta dužinama koje spajaju vrhove stola (trokuta) i polovišta bridova stola (stranica trokuta) i želi svaki dio obojiti različitom bojom, pa se pita za koji dio treba najviše boje. Odgovorite mu i dokažite svoj odgovor.
3. Na svaki stol želi postaviti cjenik kružnog oblika, najveće površine, ali da ne prelazi rubove stola. Pomozite mu dizajnirati cjenik.

II. Dan je tlocrt dijela kafića u kojem se nalazi šank. Odredite mjesto K gdje bi trebao stajati konobar tako da je jednako udaljen od police sa šalicama $Š$, aparata za kavu F i blagajne B.



Kako smo radili i što smo naučili?

1.3. Upisana kružnica

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti promatrati kružnicu upisanu trokutu i četverokutu.

Trokut

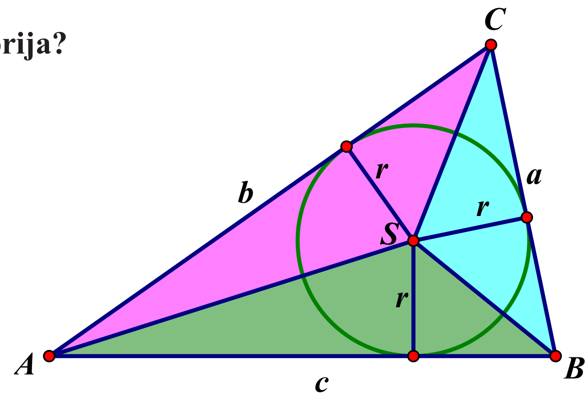
U čemu je problem?

Može li se svakom trokutu upisati kružnica? Gdje se nalazi središte upisane kružnice? Zanima nas postoji li neka veza između polumjera upisane kružnice i površine trokuta.

Napravite model.

Koristeći program dinamične geometrije nacrtajte trokut i konstruirajte kružnicu upisanu trokutu. Izmjerite površinu trokuta i polumjer upisane kružnice. Možete li naslutiti neku vezu između ovih dvaju podataka? Koristite kalkulator pa izračunajte njihovu razliku i kvocijent. Mijenjajte trokut. Što se događa s razlikom i kvocijentom? Mislite o mjernim jedinicama. Koja je mjerna jedninica razlike, a koja kvocijenta? Ako je potrebno, mjerite još neke veličine u trokutu. Uključite i te veličine u kvocijent. Istražujte dok ne dobijete kvocijent koji se mijenjanjem trokuta ne mijenja. Zapišite formulu koju ste otkrili.

Kako bi to riješila teorija?

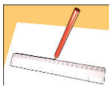


1. Promotrite trokut *ABS* na slici. Što je visina na stranicu *c* tog trokuta? Zapišite formulu za površinu P_1 trokuta *ABS*.
2. Promotrite trokut *BCS* na slici. Što je visina na stranicu *a* tog trokuta? Zapišite formulu za površinu P_2 trokuta *BCS*.
3. Promotrite trokut *CAS* na slici. Što je visina na stranicu *b* tog trokuta? Zapišite formulu za površinu P_3 trokuta *CAS*.
4. Zapišite formulu za površinu trokuta *ABC*.

Četverokut

U čemu je problem?

Zanima nas može li se svakom četverokutu upisati kružnica?



Kako to izgleda?

Nacrtajte u bilježnicu ili u programu dinamične geometrije kvadrat, romb, deltoid i pravokutnik. Upišite svakom od nacrtanih četverokuta kružnicu. Kojim ste četverokutima mogli, a kojima niste mogli upisati kružnicu?

Možete li pretpostaviti?

Što mislite, pod kojim se uvjetima četverokutu može upisati kružnica?

Kako biste nazvali četverokut kojem možemo upisati kružnicu?

Potražite pomoć tehnologije.

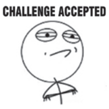
U alatu dinamične geometrije nacrtajte kružnicu, sakrijte točku koja definira kružnicu. Na kružnici konstruirajte četiri točke. Treba konstruirati tangente na kružnicu kojima su dirališta ove četiri točke. U kojem su međusobnom položaju tangenta i polumjer u diralištu? Koristite ovo svojstvo za konstrukciju tangenti. Konstruirajte četverokut čiji su vrhovi sjecišta tangenata. Označite točke u kojima se sijeku tangente s *A, B, C, D*. Stranice četverokuta *ABCD* pripadaju tangentama na kružnicu pa takav četverokut zovemo *tangencijalni četverokut*.

a. Izmjerite neke veličine četverokuta i pokušajte otkriti pravilnost. Mijenjajte položaj jednog dirališta. Vrijedi li pravilnost i dalje? Izrecite poučak.

b. Provjerite vrijedi li i za tangencijalne četverokute formula za površinu koju ste dobili za trokut. U alatu dinamične geometrije površinu tangencijalnog četverokuta izmjerite, a zatim i izračunajte koristeći formulu za površinu. Mijenjajte položaj dirališta i usporedite dobivene vrijednosti.

Kako bi to riješila teorija?

Nacrtajte kružnicu i njoj proizvoljni tangencijalni četverokut. Koristeći teoreme o sukladnosti trokuta dokažite iskazani poučak i njegov obrat.



Možemo li više?

Moraju li sva dirališta kružnice i tangenti pripadati stranicama tog četverokuta?

Nacrtajte proizvoljnu kružnicu. Na njoj odaberite kružni luk kojemu je pripadni središnji kut manji od 180°. Na tom luku po volji označite četiri točke *A*, *B*, *C* i *D*. Tangente u točkama *A* i *B* sijeku se u točki *E, t*angente u točkama *B* i *C* sijeku se u točki *F*, tangente u točkama *C* i *D* sijeku se u točki *G* i tangente u točkama *A* i *D* sijeku se u točki *H.* Kakav je četverokut *EHGF*? Izmjerite duljine stranica ovog četverokuta. Uočavate li pravilnost? Izrecite poučak.

Primijenite naučeno.

Može li trapez biti tangencijalni četverokut? Uz koji uvjet? Što mora vrijediti za jednakokračni tangencijalni trapez?

Riješite sljedeće zadatke:

a. Konstruirajte jednakokračni tangencijalni trapez kojem su zadane duljine osnovica. Zapišite vezu između duljina stranica jednakokračnoga tangencijalnog trapeza. Računski odredite opseg i površinu jednakokračnog trapeza čije su duljine osnovica 6 cm i 4 cm, ako se trapezu može upisati kružnica.

b. Kružnici zadanog polumjera opisan je trapez kojemu su zadane duljine krakova. Konstruirajte taj trapez. Računski odredite površinu trapeza ako je polumjer $r = 2$ cm i duljine krakova 5 cm i 7 cm.

c. Konstruirajte jednakokračni tangencijalni trapez ako je zadana duljina osnovice i duljina kraka. Računski odredite površinu trapeza ako je duljina osnovice a = 18 cm i kraka k = 13 cm.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Čičak, M.; Bojmić, D.; Đukić, M.; Kralj, K.; Vrančić, K. 2013./2014. *Četverokuti, mnogokuti, vektori.* Metodika nastave matematike. PMF Zagreb.

http://www.halapa.com/pravipdf/heronove.pdf

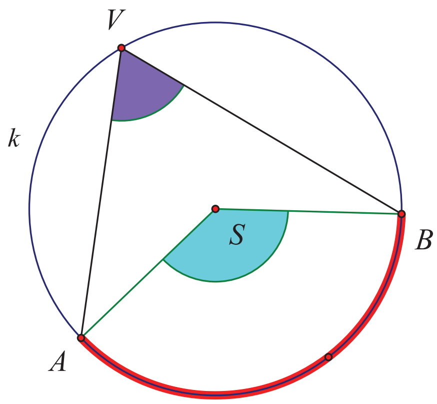
1.4. Poučak o obodnom i središnjem kutu. Talesov poučak

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti odrediti vezu između središnjeg i obodnog kuta kružnice i posljedice te veze.

U čemu je problem?

Neka su $\overline{AV}$ i $\overline{VB}$ dvije tetive kružnice k sa središtem u točki S. Kut $\angle AVB$ je obodni kut nad lukom AB, a kut $\angle ASB$ središnji kut nad lukom AB. Želimo odrediti u kojem su odnosu ti kutovi.



Možete li pretpostaviti?

Procijenite vezu između obodnog i središnjeg kuta nad istim lukom kružnice.

Potražite pomoć tehnologije.

Nacrtajte u programu dinamične kružnicu $k(S,r)$. Konstruirajte kružni luk AB i pripadni središnji kut $\angle ASB$. Nacrtajte neki obodni kut $\angle AVB$ nad tim lukom. Izmjerite veličine obodnog i središnjeg kuta. Izračunajte omjer veličine središnjeg i obodnog kuta.

Mijenjajte položaj točke V. Mijenja li se veličina obodnog kuta $\angle AVB$, a time i omjer veličine središnjeg i obodnog kuta?

Promijenite položaj točaka A, B. Što se događa s omjerom veličine središnjeg i obodnog kuta?

Izrecite poučak o obodnom i središnjem kutu kružnice.

Kako bi to riješila teorija?

Dokažite poučak o obodnom i središnjem kutu kružnice.

Uputa. Dokaz provedite u tri slučaja (za svaki slučaj nacrtajte sliku):

1. Krak obodnog kuta prolazi središtem kružnice.
2. Središte kružnice nalazi se unutar krakova obodnog kuta.
3. Središte kružnice nalazi se izvan obodnog kuta.

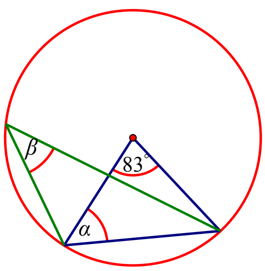
Obrazložite posljedice poučka o obodnom i središnjem kutu:

1. Svi su obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednaki.
2. Jednakim lukovima iste kružnice pripadaju jednaki obodni kutovi.
3. Talesov poučak: Obodni je kut nad promjerom kružnice pravi kut.

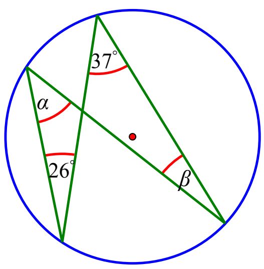
Primijenite naučeno.

1. Odredite veličine kutova sa slike:

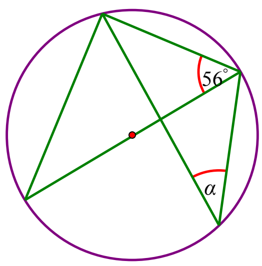
a.



b.

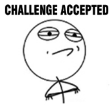


c.



2. Odredite sve točke ravnine iz kojih se zadana dužina vidi pod pravim kutom.
3. Konstruirajte pravokutni trokut ABC, kojemu je zadana duljina hipotenuze i jedne katete.

4. Pomoću Talesova poučka konstruirajte $\sqrt{6}$.
5. Dokažite da je površina trokuta ABC dana formulom $P = \frac{abc}{4R}$, gdje su a, b i c duljine stranica, a R polumjer trokutu opisane kružnice.



Možemo li više?

1. Nacrtajte kružnicu k i točku T izvan kružnice. Konstruirajte tangente povučene na kružnicu k iz točke T.
2. Nacrtajte kružnicu k i točku A na kružnici. Konstruirajte tangentu u točki A na kružnicu k. Nacrtajte tetivu $\overline{AB}$ kružnice k. Izmjerite veličinu manjeg kuta između tangente i tetive. Izmjerite veličinu manjeg obodnog kuta nad tetivom $\overline{AB}$. Mijenjajte položaj točke B. Što možete zaključiti?

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura:

Kurnik, M.; Pavković, B.; Zorić, Ž. 2006. *Matematika 1, udžbenik za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije.* Školska knjiga. Zagreb.

Krajina, J.; Gusić, I. 2008. *Matematika 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred za opće, jezične i klasične gimnazije.* Školska knjiga. Zagreb.

1.5. Tetivni četverokut

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije i teorijski istražiti kada se četverokutu može opisati kružnica.

U čemu je problem?

Gdje treba graditi aerodrom ako želimo da bude jednako udaljen od nekoliko istaknutih gradova?

Možete li pretpostaviti?

S kojim matematičkim pojmovima možete povezati položaj aerodroma koji je jednako udaljen od dvaju ili triju istaknutih gradova?

Napravite model.

Podijelite se u tročlane skupine. Prvi član skupine za neke zadane dvije točke treba konstruirati simetralu dužine određene tim točkama. Drugi član skupine treba za zadane tri točke konstruirati kružnicu opisanu trokutu kojemu su zadane točke vrhovi. Treći član skupine treba za zadane četiri točke konstruirati kružnicu opisanu četverokutu kojemu su zadane točke vrhovi. Jeste li svi uspjeli?

Potražite pomoć tehnologije.

Zadatak 1.

Odredite položaj na kojem bi trebalo izgraditi aerodrom ako želimo da bude jednako udaljen od Zagreba i od Osijeka.

Pronađite neku kartu Hrvatske u kojoj su ucrtani gradovi i kopirajte je u dokument programa dinamične geometrije. Ucrtajte točke na mjesta na kojima se nalaze Zagreb i Osijek. Konstruirajte simetralu dužine određene tim točkama. U blizini kojeg mjesta na Jadranskoj obali bi se trebao nalaziti aerodrom?

Zadatak 2.

Odredite položaj aerodroma koji bi bio jednako udaljen od Zagreba, Pariza i Berlina.

Pronađite neku kartu Europe u kojoj su ucrtani glavni gradovi i kopirajte je u dokument programa dinamične geometrije. Ucrtajte točke na mjesta na kojima se nalaze Zagreb, Pariz i Berlin. Konstruirajte kružnicu opisanu trokutu čiji su vrhovi te točke. Što predstavlja središte te kružnice? Na teritoriju koje je zemlje mjesto gdje bi trebalo graditi aerodrom?

Zadatak 3.

Odredite položaj aerodroma koji bi bio jednako udaljen od Zagreba, Pariza, Berlina i Rima.

Nalazi li se točka koja predstavlja Rim na toj kružnici iz zadatka 2.? Što zaključujemo?

Za koji od glavnih europskih gradova postoji položaj aerodroma jednako udaljenog od Zagreba, Pariza, Berlina i toga grada?

Možemo li svakom trokutu opisati kružnicu? Možemo li svakom četverokutu opisati kružnicu?

Ispitajte uvjete pod kojima je za neke zadane četiri točke moguće pronaći točku jednako udaljenu od zadanih.

<u>Uputa:</u> Nacrtajte u programu dinamične geometrije kružnicu, sakrijte točku koja definira kružnicu. Nacrtajte na kružnici četiri točke. Tako dobivenom četverokutu izmjerite duljine stranica, mjere kutova …

Mijenjajući položaj vrhova pronađite svojstvo koje se ne mijenja, tj. svojstvo koje ima četverokut kojem se može opisati kružnica.

Kako bi to riješila teorija?

Konveksni četverokut kojemu se može opisati kružnica zove se **tetivni četverokut**. Stranice tog četverokuta tetive su jedne kružnice.

Dokažite:

i. Ako je četverokut tetivni, vrijedi svojstvo koje ste otkrili u prethodnom koraku.

ii. Ako vrijedi svojstvo iz prethodnog koraka, četverokut je tetivni.

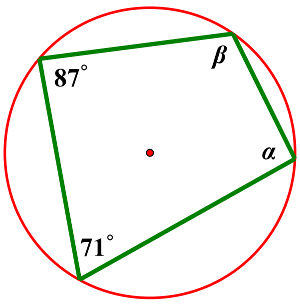
Možemo li više?

Istaknite među evropskim gradovima Zagreb i Pariz. Pronađite, ako je to moguće, glavne gradove za koje će se zajedno sa Zagrebom i Parizom moći naći položaj aerodroma kao u trećem zadatku.

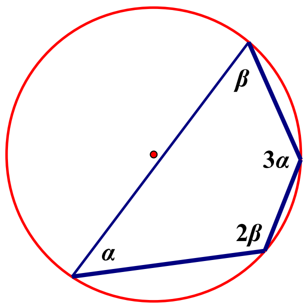
Primijenite naučeno.

1. Odredite veličine kutova sa slike.

a.



b.



2. Mjere dvaju kutova tetivnog četverokuta su 38° i 149°. Kolike su mjere preostalih dvaju kutova?
3. U tetivnom četverokutu *ABCD* vrijedi $\alpha:\beta:\gamma=3:10:15$. Koliki je kut δ?
4. Dokažite da je svaki jednakokračni trapez tetivni četverokut.
5. Dokažite **Ptolomejev poučak**: U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnoška duljina nasuprotnih stranica.
6. Konstruirajte tetivni četverokut *ABCD* ako su zadane duljine dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

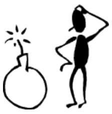
Kurnik, M.; Pavković, B.; Zorić, Ž. 2006. *Matematika 1, udžbenik za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije.* Školska knjiga. Zagreb.

Krajina, J.; Gusić, I. 2008. *Matematika 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred za opće, jezične i klasične gimnazije.* Školska knjiga. Zagreb.

1.6. Pravac i kružnica

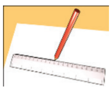
Što ćemo raditi?

Pomoću programa dinamične geometrije promatrat ćete u kojim međusobnim položajima mogu biti pravac i kružnica. Konstruirat ćete tangente iz točke na kružnicu te vidjeti kako broj zajedničkih tangenata dviju kružnica ovisi o njihovu položaju.



U čemu je problem?

Koliko zajedničkih točaka mogu imati pravac i kružnica? O čemu ovisi taj broj?



Kako to izgleda?

Nacrtajte u bilježnicu, koristeći trokute i šestar, pravac i kružnicu u sva tri položaja. Izmjerite udaljenost pravca do središta kružnice i usporedite s duljinom polumjera. Postoji li neka pravilnost?

Možete li pretpostaviti?

Kako biste konstruirali tangentu na kružnicu koja prolazi nekom točkom izvan kružnice? Koliko takvih tangenti postoji?

Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1.

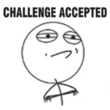
Nacrtajte u programu dinamične geometrije kružnicu i pravac koji ne siječe kružnicu. Središtem kružnice konstruirajte okomicu na taj pravac. Označite presjek pravca i okomice. Izmjerite udaljenost pravca do središta i polumjer kružnice. Pomičite pravac i usporedite udaljenost pravca s polumjerom kružnice. Što možete zaključiti?

Korak 2.

Nacrtajte kružnicu $k\ (S,\ r)$ i točku T izvan kružnice. Konstruirajte polovište P dužine $\overline{ST}$. Nacrtajte kružnicu sa središtem u P i promjerom $\overline{ST}$. Neka ta kružnica siječe kružnicu $k\ (S,\ r)$ u točkama D_1 i D_2. Konstruirajte pravce TD_1 i $\mathrm{T}D_2$. Spojite D_1 i D_2 sa središtem S. Izmjerite kutove $\angle TD_1\mathrm{S}$ i $\angle \mathrm{T}D_2S$ i duljine dužina $\overline{D_1S}$ i $\overline{D_2S}$. Pomičite točku T. Što primjećujete?

Kako bi to riješila teorija?

Pokušajte dokazati da su dobiveni pravci TD_1 i TD_2 tangente.



Možemo li više?

Ovisno o položaju dviju kružnica, koliko najviše zajedničkih tangenti može postojati?

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Konstruirajte zajedničke vanjske tangente dviju kružnica.

Upute:

- kroz središta S_1 i S_2 konstruirajte pravac
- nacrtajte kružnicu $k_3\left(S_2, r_2 - r_1\right)$
- konstruirajte na tu kružnicu tangentu S_1A iz središta S_1 kao u koraku 2
- nacrtajte normalu S_2A, označite presjek te normale i kružnice k_2 s D_1
- kroz S_1 konstruirajte okomicu na S_1A, označite presjek te okomice s kružnicom k_1 s D_3
- pravac D_1D_3 zajednička je tangenta.

Zadatak 2.

Konstruirajte zajedničke unutarnje tangente dviju kružnica.

Upute:

- kroz središta S_1 i S_2 konstruirajte pravac
- nacrtajte kružnicu $k_3\left(S_2, r_2 + r_1\right)$
- konstruirajte na tu kružnicu tangentu S_1A iz središta S_1 kao u koraku 2
- nacrtajte normalu S_2A, označite presjek te normale i kružnice k_2 s D_1
- kroz S_1 konstruirajte okomicu na S_1A, označite presjek te okomice s kružnicom k_1 s D_4
- pravac D_1D_4 zajednička je tangenta.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Dakić, B.; Elezović, N. 2006. *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije.* Element. Zagreb.

Dakić, B.; Elezović, N. 2006. *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije.* Element. Zagreb.

1.7. Potencija točke s obzirom na kružnicu

Što ćemo raditi?

Otkrit ćete što je potencija točke s obzirom na kružnicu i što je potencijalna os dviju kružnica, te svoje spoznaje primijeniti u zadatcima.

U čemu je problem?

Ako kružnicu presiječete pravcem iz zadane točke ravnine, postoji li pravilnost između duljina dužina određenih zadanom točkom i sjecištima s kružnicom?

Kako to izgleda?

Podijelite se u četveročlane skupine. Oblik rada je „kolo naokolo“.

1. Nacrtajte na papiru kružnicu i točku T izvan kružnice. Nacrtajte pravac koji sadrži točku T i siječe kružnicu. Označite sjecišta s A i B.
2. Izmjerite udaljenosti $|TA|$ i $|TB|$ i zapišite rezultate mjerenja.
3. Nacrtajte još jedan pravac koji sadrži točku T i siječe kružnicu. Označite sjecišta s C i D.
4. Izmjerite udaljenosti $|TC|$ i $|TD|$ i zapišite rezultate mjerenja.

Usporedite rezultate mjerenja u točki 2. i 4. Postoji li neka pravilnost?

Možete li pretpostaviti?

Vidjeli smo da se udaljenosti sjecišta pravca i kružnice razlikuju za različite pravce. Postoji li neka veličina koju možemo izračunati pomoću udaljenosti, a koja se neće mijenjati za različite pravce?

Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1

Nacrtajte u programu dinamične geometrije kružnicu sa središtem u točki *S*, točku *T* koja nije na kružnici i točku *A* koja pripada kružnici. Konstruirajte pravac *TA* i drugo sjecište pravca i kružnice označite s *B*.

Izmjerite udaljenosti $|TA|$ i $|TB|$. Izračunajte: $|TA|+|TB|, |TA|-|TB|, |TA|\cdot|TB|, |TA|:|TB|$

Korak 2

Mijenjajte položaj pravca pomičući točku *A*.

Što primjećujete? Koje se veličine mijenjaju, a koje ostaju nepromijenjene?

Korak 3

Pomaknite točku *T* tako da se nalazi unutar kružnice, mijenjajte položaj pravca. Koje se veličine mijenjaju, a koje ostaju nepromijenjene?

Korak 4

Kopirajte prethodnu stranicu. Nacrtajte još jedan pravac točkom *T* tako da siječe kružnicu u točkama *C* i *D*.

Mjerite i usporedite umnoške $|TA|\cdot|TB|$ i $|TC|\cdot|TD|$. Što primjećujete? Zapišite svojstvo koje ste uočili.
____.

Korak 5

Kopirajte prethodnu stranicu. Pomaknite točku *T* tako da se nalazi izvan kružnice. Pomaknite točku *C* tako da se točke *C* i *D* poklope. Što možete reći o pravcu *TC*, a što o točki *C*? U kakvoj je vezi $|TC|^2$ s polumjerom kružnice i udaljenosti zadane točke *T* do središta kružnice? Zapišite vezu koju ste dobili.
$|TA|\cdot|TB|=|TC|^2=$ ____________________.

Korak 6

Kopirajte prethodnu stranicu. Pomaknite točku *T* tako da se nalazi unutar kružnice. Pomaknite točku *C* tako da točka *T* bude polovište dužine $\overline{CD}$. U kakvoj je vezi $|TC|^2$ s polumjerom kružnice i udaljenosti zadane točke *T* do središta kružnice? Zapišite vezu koju ste dobili. $|TA|\cdot|TB| = |TC|^2 =$
____________________.

Kako bi to riješila teorija?

Dokažite svojstvo iz **Koraka 4**. Promatrajte tri slučaja:

I. Točka *T* izvan kružnice

II. Točka *T* unutar kružnice

III. Jedan od pravaca je tangenta kružnice.

Dokazali smo da produkt $|TA|\cdot|TB|$ ne ovisi o izboru točaka *A* i *B* već samo o kružnici i točki *T*.

Za točku *T* koja se nalazi **izvan** kružnice produkt $|TA|\cdot|TB|$ zove se potencija točke *T* s obzirom na kružnicu. Uvedimo oznaku za taj produkt: $p(T,k)$. U **Koraku 5** uvjerili ste se da za točku *T* izvan kružnice vrijedi:

$p(T,k)=|TA|\cdot|TB|=|TS|^2-r^2$. Kojeg je predznaka potencija točke *T* koja se nalazi izvan kružnice?

U **Koraku 6** uvjerili ste se da za točku *T* unutar kružnice vrijedi $|TA|\cdot|TB|=r^2-|TS|^2$. Za točku *T* koja se nalazi **unutar** kružnice potencija točke *T* s obzirom na kružnicu je $p(T,k)=|TS|^2-r^2=-|TA|\cdot|TB|$. Kojeg je predznaka potencija točke *T* koja se nalazi unutar kružnice?

Izračunajte $p(T,k)$ za točku *T* koja se nalazi **na** kružnici.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Za zadanu kružnicu i dužinu duljine *m* odredite geometrijsko mjesto točaka izvan kružnice koje imaju potenciju m^2 u odnosu na zadanu kružnicu.

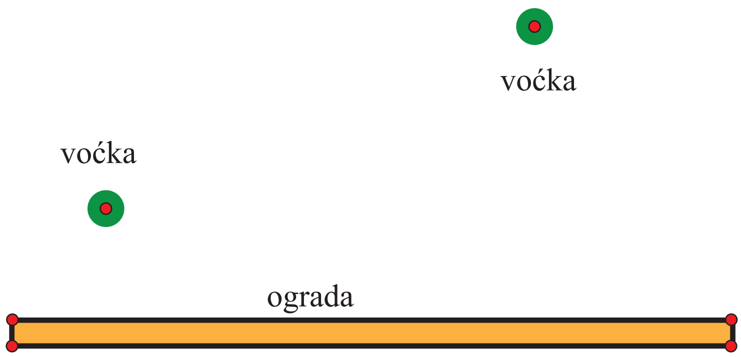
<u>Upute:</u> Dodajte praznu stranicu. Nacrtajte kružnicu *k* i dužinu duljine *m*. Nacrtajte točku *C* na kružnici. Konstruirajte tangentu na kružnicu u točki *C*. Konstruirajte točku *T* na tangenti tako da duljina dužine $\overline{CT}$ bude *m*. Dobili ste jednu točku za koju je $p(T,k)=m^2$ (obrazložite zašto). Označite točku *T*, odaberite *Zaslon, Trag točke*. Pomičite točku *C*. Gdje se nalaze sve točke koje imaju potenciju m^2 u odnosu na zadanu kružnicu? Konstruirajte taj skup točaka.

Zadatak 2.

Gospođa Tangenta želi u dvorištu napraviti cvijetnjak pravokutnog oblika površine 25 m^2 tako da je 7 m dulji nego širi. Pomognite joj konstruirati cvijetnjak.

Zadatak 3.

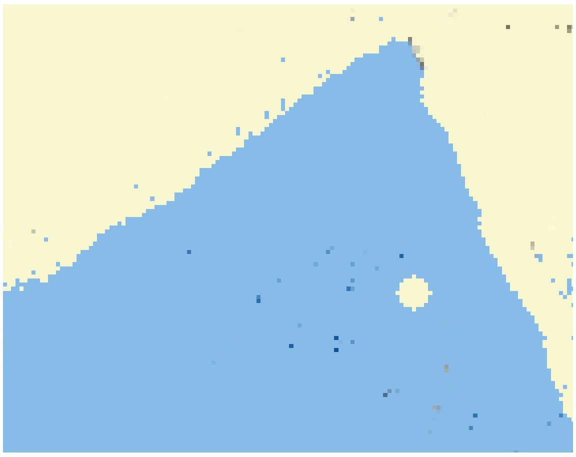
Obitelj Kružić želi okrugli bazen u svom dvorištu. Najviše mjesta imaju između dviju voćki i ograde. Postavite im najveći bazen koji stane u to područje.



Zadatak 4.

Na slici je zaljev u kojem se nalazi mali otok.

Turistički brodić treba pri jednom obilasku pristati na oba "kraka" obale i na otočić gibajući se po kružnoj putanji. Konstruirajte kružnicu po kojoj se giba i označite pristaništa.



Možemo li više?

Zadatak 5.

Za zadanu kružnicu i dužinu duljine m odredite geometrijsko mjesto točaka unutar kružnice koje imaju potenciju $-m^2$ u odnosu na zadanu kružnicu.

Upute: Dodajte praznu stranicu. Nacrtajte kružnicu k i dužinu duljine m. Nacrtajte točku C na kružnici. Konstruirajte tetivu $\overline{CD}$ duljine $2m$. Konstruirajte polovište dužine $\overline{CD}$ i označite ga T. Dobili ste jednu točku za koju je $p(T,k) = -m^2$ (obrazložite zašto). Označite točku *T*, odaberite *Zaslon, Trag polovišta*. Pomičite točku *C*. Gdje se nalaze sve točke koje imaju potenciju $-m^2$ u odnosu na zadanu kružnicu? Konstruirajte taj skup točaka.

Zadatak 6.

Odredite geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednake potencije u odnosu na dvije zadane kružnice.

Upute: Nacrtajte kružnice k_1 i k_2, polupravac *PQ* i na njemu dužinu $\overline{PR}$.

Konstruirajte skup svih točaka izvan kružnice k_1 koje imaju potenciju $|PR|^2$. Konstruirajte skup svih točaka izvan kružnice k_2 koje imaju potenciju $|PR|^2$. Gdje se nalaze točke koje imaju potenciju $|PR|^2$ u odnosu na obje zadane kružnice? Konstruirajte te točke, označite ih, odaberite *Zaslon, Trag točke*. Pomičite točku *R*.

Konstruirajte skup svih točaka unutar kružnice k_1 koje imaju potenciju $-|PR|^2$. Konstruirajte skup svih točaka izvan kružnice k_2 koje imaju potenciju $-|PR|^2$. Gdje se nalaze točke koje imaju potenciju $-|PR|^2$ u odnosu na obje zadane kružnice? Konstruirajte te točke, označite ih, odaberite *Zaslon, Trag točke*. Pomičite točku *R*.

Opišite i konstruirajte skup svih točaka koje imaju jednake potencije u odnosu na dvije zadane kružnice.

Skup svih točaka ravnine koje imaju jednake potencije u odnosu na dvije zadane kružnice zove se potencijalna os tih kružnica.

Mijenjajte položaj kružnica i opišite potencijalnu os kružnica koje:

a. se dodiruju
b. se sijeku
c. se ne sijeku i nisu koncentrične
d. su koncentrične.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Pavković, B.; Veljan, D. 1995. *Matematika 1, zbirka zadataka za prvi razred srednjih škola*. Školska knjiga. Zagreb.

Dakić, B.; Elezović, N. 2014. *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije.* Element. Zagreb.

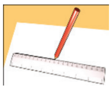
1.8. Preslikavanja ravnine

Što ćemo raditi?

Preslikavat ćete točke ravnine u točke ravnine pomoću translacije, osne simetrije, rotacije, centralne simetrije i homotetije. Pomoću tehnologije istraživat ćete svojstva tih preslikavanja i pokušati ih zapisati pomoću koordinata.

U čemu je problem?

Prisjetite se definicija translacije, osne simetrije, centralne simetrije i rotacije.



Kako to izgleda?

Na papiru nacrtajte točku A. Nacrtajte neki vektor translacije, os simetrije, centar simetrije, središte i kut rotacije. Preslikajte točku A koristeći preslikavanja koja ste upoznali u osnovnoj školi.

Možete li pretpostaviti?

Koja su preslikavanja izometrije (čuvaju udaljenost), a koja ne?

Potražite pomoć tehnologije.

Translacija

Zadajte vektor translacije $\overrightarrow{PQ}$ i točke A i B. Točke A' i B' dobit će se translacijom točaka A i B za vektor $\overrightarrow{PQ}$. Konstruirajte točke A' i B'.

- Izmjerite udaljenosti točaka A i B, a zatim točaka A' i B'. Usporedite izmjerene udaljenosti. Mijenjajte položaj točaka A i B i vektor translacije. Zapišite uočeno svojstvo formulom. Dokažite uočeno svojstvo.

- U kojem su međusobnom položaju dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$?
- Na dužini $\overline{AB}$ nacrtajte točku T i konstruirajte T'. Gdje se nalazi točka T'?
- Kopirajte prethodnu stranicu i definirajte koordinatni sustav. Zapišite preslikavanje pomoću koordinata.

Osna simetrija

Zadajte pravac p i točke A i B. Točke A' i B' osno su simetrične točkama A i B s obzirom na pravac p. Konstruirajte točke A' i B'.

- Izmjerite udaljenosti točaka A i B, a zatim točaka A' i B'. Usporedite izmjerene udaljenosti. Mijenjajte položaj točaka A i B i pravac p. Zapišite uočeno svojstvo formulom. Dokažite uočeno svojstvo.
- U kojem su međusobnom položaju dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$?
- Na dužini $\overline{AB}$ nacrtajte točku T i konstruirajte T'. Gdje se nalazi točka T'?
- Definirajte koordinatni sustav, zrcalite točke A i B preko osi x, odnosno osi y. Usporedite dobivene koordinate točaka s početnim. Što možete uočiti? Zapišite pravila preslikavanja pomoću koordinata.
- Nacrtajte simetrale I. i III. kvadranta, odnosno II. i IV. kvadranta, zatim zrcalite točke s obzirom na te simetrale. Kako biste zapisali pravila preslikavanja pomoću koordinata?

Rotacija

Zadajte točku O, kut α i točke A i B. Točke A' i B' dobit će se rotacijom točaka A i B oko točke O za kut α. Konstruirajte točke A' i B'.

- Izmjerite udaljenost točaka A i B, a zatim točaka A' i B'. Usporedite izmjerene udaljenosti. Mijenjajte položaj točaka A i B, točke O i kut α. Zapišite uočeno svojstvo formulom. Dokažite uočeno svojstvo.
- U kojem su međusobnom položaju dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$?
- Na dužini $\overline{AB}$ nacrtajte točku T i konstruirajte T'. Gdje se nalazi točka T'?
- Točka $T(x, y)$ pri rotaciji oko ishodišta koordinatnog sustava za kut α preslikava se u točku $T'\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha\right)$. Provjerite dani izraz pomoću tehnologije.

Centralna simetrija

Zadajte centar simetrije O i točke A i B. Točke A' i B' centralno su simetrične točkama A i B s obzirom na točku O. Konstruirajte točke A' i B'.

1. Izmjerite udaljenosti točaka A i B, a zatim točaka A' i B'. (Centralna simetrija s obzirom na točku O preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da je O polovište dužine $\overline{AA'}$.)

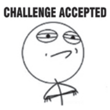
   Usporedite izmjerene udaljenosti. Mijenjajte položaj točaka A i B, točke O. Zapišite uočeno svojstvo formulom. Dokažite uočeno svojstvo.

2. Definirajte koordinatni sustav, centar simetrije postavite u ishodište koordinatnog sustava, preslikajte točke A i B. Zapišite pravilo preslikavanja pomoću koordinata.

Kako bi to riješila teorija?

Sva preslikavanja ravnine koja smo dosad promatrali imala su svojstvo da je $|A'B'| = |AB|$. Za preslikavanje za koje je $|A'B'| = |AB|$ kažemo da čuva udaljenosti i nazivamo ga izometrija.

Možemo li neka od tih preslikavanja opisati pomoću rotacije ili translacije?



Možemo li više?

Homotetija

Zadajte točku O i dvije točke A i B. Konstruirajte točku A' tako da točke O, A, A' pripadaju istom pravcu, A i A' s iste su strane točke O i udaljenost točke A' od točke O dvostruko je veća u odnosu na udaljenost točke A od točke O. Na isti način konstruirajte i točku B. Je li ovako opisano preslikavanje izometrija? Preslikavanja ovog tipa nazivaju se homotetije.

Definicija

Neka je zadana točka O i $k \neq 0$ realan broj. Homotetija sa središtem u točki O i koeficijentom k preslikavanje je ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da vrijedi

1. O, A, A' kolinearne su točke
2. A i A' s iste su strane točke O za $k > 0$
3. A i A' s različitih su strana točke O za $k < 0$
4. $|OA'| = |k||OA|$.

Zadatak 1.

Zadajte središte homotetije O i točku A. Konstruirajte točku A' ako je koeficijent homotetije:

a. $k=3$ b. $k=\frac{2}{3}$ c. $k=-1$ d. $k=-2$.

Zadajte središte homotetije O (nacrtajte točku O, *Transformacije/Označite središte*), koeficijent homotetije (*Broj/Novi Parametar, Transformacije/Označite faktor ljestvice*) i točke A i B. Konstruirajte točke A' i B' (*Transformacije/Dilatirajte*)

- U kojem su međusobnom položaju dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$? Dokažite.
- Izmjerite udaljenosti točaka A i B, a zatim točaka A' i B'. Usporedite izmjerene udaljenosti. Mijenjajte položaj točaka O, A i B. Promijenite koeficijent homotetije. Zapišite uočeno svojstvo formulom. Dokažite uočeno svojstvo.
- Na dužini $\overline{AB}$ nacrtajte točku T i konstruirajte T'. Gdje se nalazi točka T'?
- Zapišite pravilo preslikavanja pomoću koordinata za homotetiju sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i koeficijentom $k \neq 0$.

Zadatak 2.

Zadajte središte homotetije O i koeficijent homotetije k. Nacrtajte trokut. Konstruirajte sliku trokuta pri zadanoj homotetiji. Mijenjajte k. U kojem su odnosu zadani trokut i njegova slika?

Zadatak 3.

U zadani trokut upišite kvadrat tako da na jednoj stranici trokuta budu dva vrha kvadrata, a na preostalim dvjema stranicama preostala dva vrha kvadrata. Koliko rješenja ima zadatak?

Primijenite naučeno.

Zadatak 4.

Zadan je jednakostranični trokut. Središte je rotacije u težištu danog trokuta. Koliki trebaju biti kutovi rotacije da se trokut preslika u sebe?

Zadatak 5.

Preslikajte kvadrat $ABCD$ pomoću centralne simetrije sa središtem u sjecištu dijagonala u kvadrat $A'B'C'D'$. Postoji li neka rotacija koja ima isti učinak?

Zadatak 6.

Dužinu $\overline{AB}$ preslikajte pomoću rotacije za kut α oko središta rotacije O_1 u $\overline{A'B'}$ pa zatim oko novog središta O_2 za kut $-\alpha$ u dužinu $\overline{A''B''}$. Postoji li neko preslikavanje koje direktno preslikava dužinu $\overline{AB}$ u dužinu $\overline{A''B''}$?

Zadatak 7.

Zadane su dvije osi simetrije s_1 i s_2, te dužina $\overline{AB}$. Što se dobije ako se dužina $\overline{AB}$ zrcali u odnosu na s_1, a onda se dobivena dužina $\overline{A_1B_2}$ zrcali u odnosu na s_2:

a. ako su osi simetrije usporedne

b. ako se osi simetrije sijeku?

Literatura

Kurepa, Đ.; Benčić, V.; Smolec, I. 1964. *Geometrija za 1. razred gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

1.9. Parabola

Što ćemo raditi?

Izvest ćete dvije konstrukcije parabole. Koristeći definiciju parabole uvjerit ćete se da konstruirani skupovi točaka zaista čine parabolu te ćete istražiti neka svojstva na temelju konstrukcija.

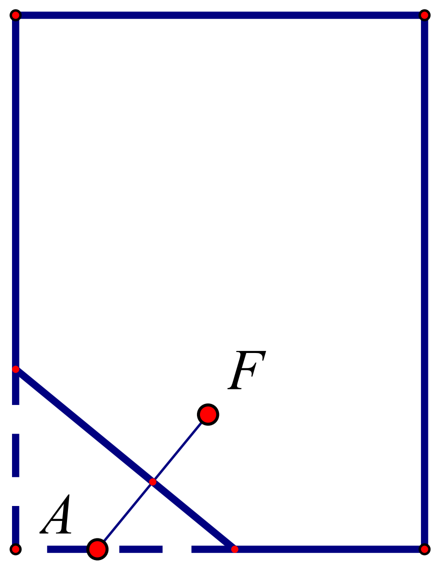
U čemu je problem?

Parabolu želimo konstruirati kao geometrijsko mjesto točaka po definiciji ili svojstvu parabole.

Napravite model.

Konstrukcija parabole

Uzmite list papira, kraću stranicu okrenite prema sebi, te na donjoj četvrtini u sredini papira nacrtajte točku F. Neka vam donji kraći rub predstavlja pravac na kojem odabirete proizvoljnu točku A. Presavijanjem papira konstruirajte simetralu dužine $\overline{AF}$. Ponovite postupak desetak puta. Što opisuju ovako iscrtani presjeci?



Potražite pomoć tehnologije.

Konstrukcija parabole po definiciji

Nacrtajte pravac, označite ga r (ravnalica ili direktrisa). Nacrtajte točku F (žarište ili fokus) koja ne pripada ravnalici. Konstruirat ćete točke T_1, T_2 koje su jednako udaljene od r i F. Najprije zadajte udaljenost točke od r i od F, tako da nacrtate pravac, te na tom pravcu konstruirajte dužinu. Neka je duljina konstruirane dužine d.

Riješite zadatke:

1. Gdje se nalaze sve točke koje su za d udaljene od točke F? Konstruirajte taj skup točaka.
2. Gdje se nalaze sve točke koje su za d udaljene od pravca r? Konstruirajte taj skup točaka.
3. Gdje se nalaze sve točke koje su za d udaljene i od točke F i od pravca r? Konstruirajte sve te točke. Namjestite da ostavljaju trag. Mijenjajte dužinu d.
4. Kopirajte prethodnu stranicu, istaknite točku T_1, jedan kraj dužine d i pravac na kojem se nalazi dužina d. Na padajućem izborniku *Konstrukcije* odaberite opciju *Lokus*. Isto ponovite s točkom T_2.

Konstrukcija parabole po modelu

Nacrtajte pravac r i točku F koja ne pripada pravcu r. Nacrtajte točku A na pravcu r. Konstruirajte dužinu $\overline{AF}$. Konstruirajte simetralu dužine $\overline{AF}$, namjestite da ostavlja trag, animirajte točku A.

Razmislite:

1. Što ocrtavaju simetrale dužine? Što su simetrale tom skupu?
2. Kopirajte stranicu sa simetralom, namjestite da ne ostavlja trag. Konstruirajte točku D na simetrali koja pripada paraboli (diralište).
3. Namjestite da točka D ostavlja trag. Animirajte točku A. Konstruirajte locus tako da odaberete točku D, zatim točku A i ravnalicu r, te u padajućem izborniku *Konstrukcije* odaberite *Locus*.

Kako bi to riješila teorija?

U konstrukciji parabole po modelu dokažite da ste tako opisali parabolu. Dokažite dvije tvrdnje. Prvo da je konstruirana točka D na paraboli, a zatim da je simetrala dužine $\overline{AF}$ tangenta na parabolu.

Primijenite naučeno.

Konstruiranu parabolu pomoću simetrale kopirajte tri puta, te istražite sljedeće odnose i svojstva.

Parabola i tangenta

1. Sakrijte sve osim ravnalice, žarišta i parabole. Nacrtajte neku točku *T* na paraboli. Koristeći prethodne zaključke konstruirajte tangentu na parabolu u točki *T*.

Svojstva parabole

Svojstvo parabole I

Nacrtajte zraku (polupravac) čiji vrh pripada paraboli, a cijeli se nalazi u dijelu ravnine unutar parabole. Kako će se ta zraka odbiti od parabole? Konstruirajte zraku odbijanja. Mijenjajte položaj početne zrake i promatrajte položaj zrake odbijanja. Primjećujete li neki specifični položaj? Pomaknite vrh zrake. Vrijedi li uočeno svojstvo i za ovu zraku?

Konstruirajte zraku u specifičnom položaju, konstruirajte odbijenu zraku i zapišite svojstvo riječima.

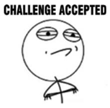
Svojstvo parabole II

1. Nacrtajte točku *D* na paraboli i konstruirajte tangentu u toj točki. Konstruirajte točku u kojoj tangenta siječe os parabole (točka *A*) i ortogonalnu projekciju točke *D* na os parabole (točka *B*). Mijenjajte položaj točke *D* i promatrajte položaj točaka *A* i *B*. Uočavate li pravilnost? Zapišite ju riječima.

2. Konstruirajte ortogonalnu projekciju točke *D* na ravnalicu (točka *C*). Konstruirajte četverokut *ACDF* (*F* je žarište). Mijenjajte položaj točke *D* i promatrajte četverokut *ACDF*. Uočavate li pravilnost? Zapišite ju riječima.

Svojstvo parabole III

Nacrtajte točku *D* na paraboli i konstruirajte tangentu u toj točki. Neka je *S* sjecište tangente i ravnalice. Konstruirajte pravac *SF*. Promotrite kut *DFS*. Mijenjajte položaj točke *D* i promatrajte kut. Uočavate li pravilnost? Zapišite ju riječima.



Možemo li više?

Dokažite svojstva parabole I, II i III.

Kako smo radili i što smo naučili?

1.10. Elipsa

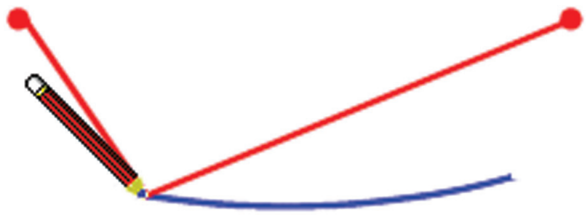
Što ćemo raditi?

Izvest ćete nekoliko konstrukcija elipse. Za konstruirane krivulje utvrdit ćete da se uistinu radi o skupu točaka koji nazivamo elipsom, koristeći definiciju elipse i njenu jednadžbu.

Napravite model.

Vrtlarska konstrukcija elipse

Upotrijebite ploču od stiropora, dva čavlića, deblji konac i olovku, te konstruirajte krivulju tako kako je prikazano na slici.



Potražite pomoć tehnologije.

Vrtlarska konstrukcija elipse

Nacrtajte točke F_1, F_2 koje će biti fokusi elipse. Nacrtate dužinu $\overline{AB}$ čija će duljina biti $2a$. Konstruirajte jednu točku koja će se po definiciji nalaziti na elipsi.

Uputa:

1. Konstruirajte točku C na dužini $\overline{AB}$.
2. Konstruirajte kružnicu polumjera $\overline{AC}$ sa središtem u F_1 i kružnicu polumjera $\overline{CB}$ sa središtem u F_2.
3. Konstruirajte sjecišta kružnica.
4. Obrazložite zašto se sjecišta nalaze na elipsi.
5. Istaknite sjecišta, na padajućem izborniku *Zaslon* odaberite opciju *Trag točke* i pomičite točku C.
6. Kopirajte prethodnu stranicu, istaknite točku C i jedno sjecište, na padajućem izborniku *Konstrukcije* odaberite opciju *Locus*. Isto ponovite s drugim sjecištem.

Zidarska konstrukcija elipse

1. Konstruirajte dva okomita pravca koji predstavljaju koordinatne osi i na osi x konstruirajte točku A. Konstruirajte dužinu r.
2. Konstruirajte kružnicu polumjera r sa središtem u točki A. Neka je točka B sjecište kružnice i osi y. Konstruirajte polupravac AB. Konstruirajte na polupravcu točku C i neka točka C ostavlja trag (istaknite točku C, na padajućem izborniku *Zaslon* odaberite opciju *Trag točke*).
3. Pomičite točku A. Dobili ste pola krivulje.
4. Označite os x i na padajućem izborniku *Transformacije* odaberite opciju *Označite os simetrije*. Istaknite točku C i zrcalite ju s obzirom na označenu os simetrije (*Transformacije/Zrcalite*). Istaknite zrcaljenu točku i odaberite *Zaslon/Trag točke*.
5. Kopirajte prethodnu stranicu, istaknite točku A i točku C, na padajućem izborniku *Konstrukcije* odaberite opciju *Locus*.

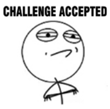
Elipsa kao afina slika kružnice

1. Zadajte dužine čije su duljine a i b, $a > b$.
2. Definirajte koordinatni sustav.
3. Konstruirajte kružnice sa središtem u O polumjera a i b.
4. Odaberite proizvoljno točku P na većoj kružnici, konstruirajte dužinu $\overline{OP}$ i sjecište dužine i manje kružnice označite s Q.
5. Konstruirajte okomicu iz točke P na os apscisa i iz točke Q na os ordinata. Sjecište okomica označite sa T. Istaknite točku T i odaberite *Zaslon/Trag točke*.
6. Kopirajte prethodnu stranicu i konstruirajte *Locus*。

Kako bi to riješila teorija?

Uz zidarsku konstrukciju elipse – promotrite konstrukciju elipse i odredite dužine koje predstavljaju malu i veliku poluos elipse. Dokažite da je dobivena krivulja elipsa.

Uz elipsu kao afinu slike kružnice – promotrite konstrukciju elipse i odredite dužine koje predstavljaju malu i veliku poluos elipse. Dokažite da je dobivena krivulja elipsa. Elipsa je nastala sažimanjem kružnice prema osi apscisa. Na tom se njezinu svojstvu temelji crtanje elipse u računalnim programima. Naime, potrebno je promijeniti samo ordinatu točke na kružnici. Kako?



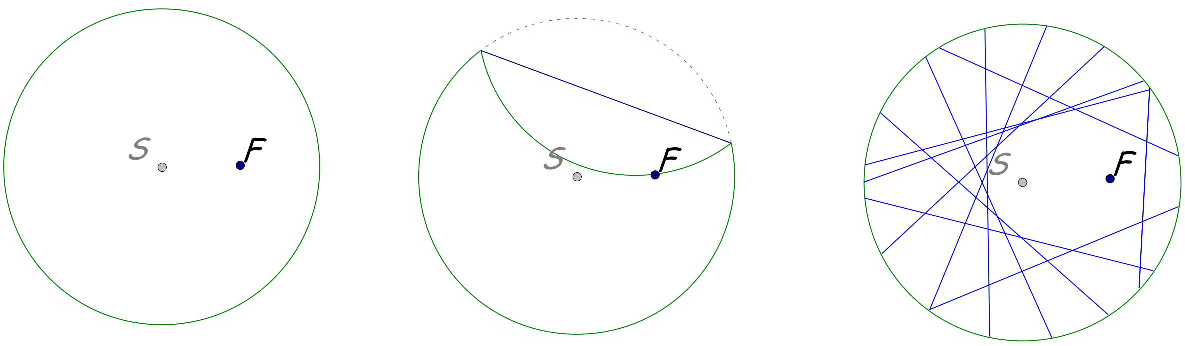
Možemo li više?

Simetrale dužine i elipsa

1. Konstruirajte kružnicu i točku F unutar kruga.
2. Odaberite proizvoljno točku T na kružnici, konstruirajte simetralu dužine $\overline{FT}$. Istaknite simetralu i odaberite *Zaslon/Trag okomice*.
3. Kopirajte prethodnu stranicu i konstruirajte *Locus*.
4. Mijenjajte položaj točke T.
5. Gdje su fokusi? Što se događa kad točku F pomičete bliže kružnici ili središtu kružnice?

Konstrukcija elipse presavijanjem papira

Izrežite iz papira krug i u njemu označite točku F koja nije ni središte kruga ni točka na kružnici. Presavijte papir tako da proizvoljna točka s kružnog luka padne na točku F.



Postupak ponavljajte, pregibima obiđite cijeli krug. Otvorite papir. Što uočavate?

Primijenite naučeno.

Kanta boje obješena je na prečku ljestava naslonjenih na zid. Ako ljestve počnu kliziti, koju će putanju opisati kanta?

Kako smo radili i što smo naučili?

1.11. Modeliranje krivuljama drugog reda

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti primijeniti znanje o krivuljama drugog reda u primjerima iz svakodnevnog života.

U čemu je problem?

„Whispering gallery“ prostorija je koja u nekom presjeku ima eliptični oblik. Primjer jedne takve galerije je Statuary Hall u zgradi U.S. Capitol Building. Od 1807. do 1857. godine koristila se za sastanke u američkom Zastupničkom domu. Priča se da je zastupnik John Quincy Adams koristio akustiku u dvorani za prisluškivanje razgovora drugih zastupnika koji su se nalazili na suprotnoj strani sobe. Možemo li objasniti taj fenomen?

Kako to izgleda?

Pogledajte ovaj video: https://www.youtube.com/watch?v=FX6rUU_74kk .

Možete li pretpostaviti?

Na kojem su se mjestu u galeriji nalazili posjetioci, a na kojem vodič?

Napravite model.

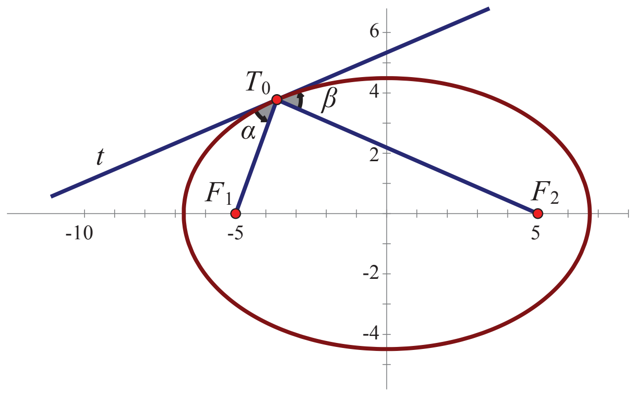
1. Dvorana u obliku elipse široka je 14 m i duga 29.5 m. Napišite jednadžbu elipse koja modelira promatranu dvoranu. Dva se posjetioca nalaze u fokusima dvorane i mogu čuti jedan drugoga. Koliko su posjetioci udaljeni?
2. Što znate o širenju zvuka? Što znate o odbijanju zvučnih valova? Ako se šapat iz jednog fokusa čuje u drugom, što mora vrijediti?

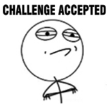
Potražite pomoć tehnologije.

1. Izrazite y iz jednadžbe elipse i nacrtajte grafove funkcija $f(x)=y, g(x)=-y$. Dobili ste elipsu. Nacrtajte neku točku T_0 na elipsi. Otvorite *Pomoć/Uzorci Sketcheva & Alati/Korisnički alati/Račun.* U svome dokumentu (*Prozor*) uz pomoć alata *Tangenta* nacrtajte tangentu na elipsu u točki T_0. Izmjerite kutove koje tangenta zatvara s pravcima F_1T_0 i F_2T_0. Što uočavate? Promijenite položaj točke T_0. Što uočavate?
2. Napravite klizače a i b i nacrtajte elipsu danu jednadžbom $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Ponovite isti postupak kao u 1. Vrijede li ista zapažanja za svaku elipsu?

Kako bi to riješila teorija?

Računom objasnite „fenomen šaputanja“. Dokažite dobiveno svojstvo za bilo koju elipsu. Neka je $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Zapišite općenito koordinate točaka F_1, F_2, T_0, gdje su F_1, F_2 fokusi, a T_0 točka na elipsi. Neka je t tangenta na elipsu u točki T_0. Zapišite koeficijente smjera pravaca t, F_1T_0, F_2T_0. Zapišite formulom tangense kutova α i β. Dobivene izraze sredite i usporedite. Pri tome koristite činjenicu da točka T_0 pripada elipsi i vezu između a, b i e.





Možemo li više?

- Dvorana duljine 16 m ima strop u obliku elipse. Maksimalna visina dvorane je 4 m, a minimalna 1 m. Gdje treba postaviti dva udaljena sjedala tako da osobe koje na njima sjede čuju jedna drugu? Koja je visina dvorane iznad tih sjedala?

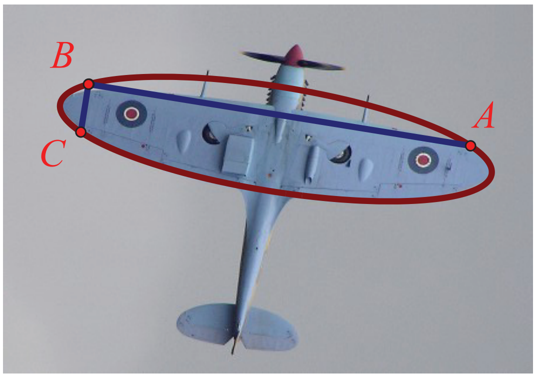
Primijenite naučeno.

Podijelite se u tri grupe. Svaka grupa rješava zadatke iz jednoga radnog centra. Nakon toga izmijenite zadatke.

Radni centar 1 – Elipsa

1. Prema Prvom Keplerovu zakonu svi planeti Sunčeva sustava gibaju se po elipsama kojima je Sunce jedno žarište. Numerički ekscentricitet Marsove orbite jednak je 0.0934, a duljina glavne poluosi je 227 939 100 kilometara. Izračunajte najmanju i najveću udaljenost Marsa od Sunca.

2. U Drugom svjetskom ratu Velika Britanija koristila je borbeni zrakoplov Supermarine Spitfire. To je najpoznatiji zrakoplov čija su krila eliptična oblika. Smatra se da je to najbolji oblik krila jer stvara minimalno induciran otpor. Raspon krila je 11.23 m, a najveća širina krila je 6.31 m. Ako je $|AB| = 9.73$ m, koliko je $|BC|$?



Radni centar 2 – Hiperbola

1. LORAN navigacija (eng. Long-range navigation) navigacijski je sustav koji je razvijen tijekom Drugoga svjetskog rata, a temelji se na radiovalovima. Sustav omogućava upravljanje letjelicom tako da se održava stalna razlika između udaljenosti letjelice do dviju čvrstih točaka: glavne stanice (eng. Master) i pomoćne stanice (eng. Slave). Te su dvije stanice međusobno udaljene 200 km. Stanica koja je bliže letjelici primi signal 500 μs (mikrosekunda) prije druge. Ako radiosignal putuje brzinom od 0.37 km/μs, napišite jednadžbu krivulje koja opisuje moguće položaje letjelice.

2. Osni presjek dimnjaka na slici jest hiperbola. Dimnjak je visok 122 m, maksimalna je širina (promjer) dimnjaka na tlu i iznosi 100 m. Na visini od 91 m dimnjak je najuži i njegova minimalna širina iznosi 57 m. Koliko iznosi širina dimnjaka na vrhu?

Radni centar 3 – Parabola

1. Osni presjek satelitskog tanjura ima oblik parabole. Najveća širina tanjura je 4 metra. Tanjur je dubok 75 cm. Odredite jednadžbu koja opisuje osni presjek tanjura.

2. Preko rijeke pruža se most čiji luk ima oblik parabole raspona 120 m. Najveća je visina luka 5 m. Ravna cesta prolazi iznad luka na udaljenosti 1 m od vrha luka mosta.

   a. Napišite jednadžbu koja opisuje luk mosta.

   b. Između ceste i luka parabole postavljeni su vertikalni potporni stupovi na međusobnoj udaljenosti od 10 metara. Jedan je potporanj na sredini mosta. Izračunajte duljinu svih potpornih stupova između luka i ceste.

Kako smo radili i što smo naučili?

https://en.wikipedia.org/wiki/File:National_Statuary_Hall_Collection.jpg (pristupljeno 25. 6. 2016.)

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spitfire.planform.arp.jpg (pristupljeno 25. 6. 2016.)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Termolektrana_Ugljevik.JPG (pristupljeno 25. 6. 2016.)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C5%A0ibenik-most.jpg (pristupljeno 25. 6. 2016.)

1.12. Tjemena jednadžba krivulja drugog reda

Što ćemo raditi?

U ovoj ćete aktivnosti pomoću tehnologije promatrati krivulje drugog reda u posebnom položaju u koordinatnom sustavu kad im je tjeme u ishodištu, a os y tjemena tangenta.

U čemu je problem?

Može li se svaka naizgled prilično različita krivulja drugog reda zadati jednom te istom jednadžbom?

Kako to izgleda?

Nacrtajte elipsu i hiperbolu s centrom u ishodištu koordinatnog sustava i žarištima na osi x. Translatirajte elipsu u pozitivnom smjeru osi x za $x_0 = a$, tako da je novi centar elipse u točki $S(a,0)$.

Isto tako, translatirajte hiperbolu u negativnom smjeru osi x za $x_0 = -a$ tako da je novi centar hiperbole u točki $S(a,0)$.

Nacrtajte parabolu tako da je os x os parabole, ishodište u njezinu tjemenu i žarište na pozitivnom dijelu osi x.

Možete li pretpostaviti?

Pokušajte zapisati jednadžbe elipse i hiperbole u novom sustavu.

Zapišite jednadžbu parabole. Usporedite jednadžbe. U kakvoj su vezi kanonska i tjemena jednadžba parabole?

Potražite pomoć tehnologije.

Parabola

Korak 1.

Nacrtajte u programu dinamične geometrije parabolu čija je os simetrije os x i tjeme u ishodištu.

Konstruirajte pravac paralelan s y osi koji sadrži fokus parabole. U sjecištima parabole i pravca konstruirajte paralele s x osi i označite ih s a i b. Nacrtajte točku T na paraboli. Konstruirajte pravac paralelan s osi y koji sadrži točku T i označite ga s c. Konstruirajte pravokutnik $ABCD$ određen pravcima a, b, c i osi y. Mjerite površinu pravokutnika $ABCD$.

Korak 2.

Konstruirajte kvadrat $EFGT$ čije dvije stranice pripadaju pravcu c i osi x. Mjerite površinu kvadrata $EFGT$. Mijenjajte položaj točke T i promatrajte izmjerene površine. Što možete zaključiti?

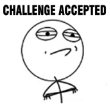
Elipsa i hiperbola

Podijelite se u dvije skupine. Jedna će skupina promatrati elipsu, a druga hiperbolu. Konstruirajte elipsu i hiperbolu tako da im je jedno tjeme u ishodištu koordinatnog sustava i žarišta na osi x, a os y tjemena tangenta. Konstruirajte pravokutnik $ABCD$ i kvadrat $EFGT$ kao kod parabole. Za elipsu konstruirajte pravac paralelan s osi y koji sadrži lijevo žarište elipse, a za hiperbolu onaj koji sadrži desno žarište hiperbole. Usporedite njihove površine. Računajte razlike tih površina. Mijenja li se ta razlika u ovisnosti o položaju točke $T(x, y)$? Izmjerite parametar a, poluparametar p i apscisu x točke T. Pronađite veličinu kojoj je jednaka razlika površina. Koristeći tu jednakost izrazite površinu kvadrata $EFGT$. Zapišite površine kvadrata koristeći x, y, p. Popunite tablicu:

parabola	$y^2 =$
elipsa	$y^2 =$
hiperbola	$y^2 =$

Kako bi to riješila teorija?

Iz jednadžbi $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i $\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ izrazite y^2. Dobiveni izraz malo pojednostavnite. Sjetite se kako se računa parametar, odnosno poluparametar elipse i hiperbole. Zapišite jednadžbe pomoću poluparametra p.



Možemo li više?

Pogledajte još jednom dobivene jednadžbe. Uvedite oznaku ε za numerički ekscentricitet $\left(\varepsilon = \frac{e}{a}\right)$.
Zapišite jednadžbe pomoću p i ε.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Kurepa, S. 1987. *Matematika za srednje škole*. Školska knjiga. Zagreb.

2. Geometrija 2

2.1. Presjek kocke ravninom

Što ćemo raditi?

Određivat ćete presjeke kocke s ravninom te otkriti koji sve geometrijski likovi nastaju pri takvim presjecima.

U čemu je problem?

Ako kocku presiječete ravninom zadanom trima točkama, koji lik će nastati kao rezultat presjeka?

Kako to izgleda?

Podijelite se u tročlane skupine. Oblik rada je „kolo naokolo“.

Dobili ste listić sa zadatcima i plastelin. Riješite prvi zadatak na listiću koji ste dobili. Zatim predajte listić i model učeniku do sebe. Na novom listiću riješite drugi zadatak pa ponovo predajte listić učeniku do sebe. Konačno riješite i treći zadatak. Koje ste likove dobili kao presjek?

Možete li pretpostaviti?

Primijetili ste da je presjek kocke ravninom pravokutnik ili trokut. Mogu li se odabrati tri točke na kocki tako da presjek ne bude pravokutnik ili trokut?

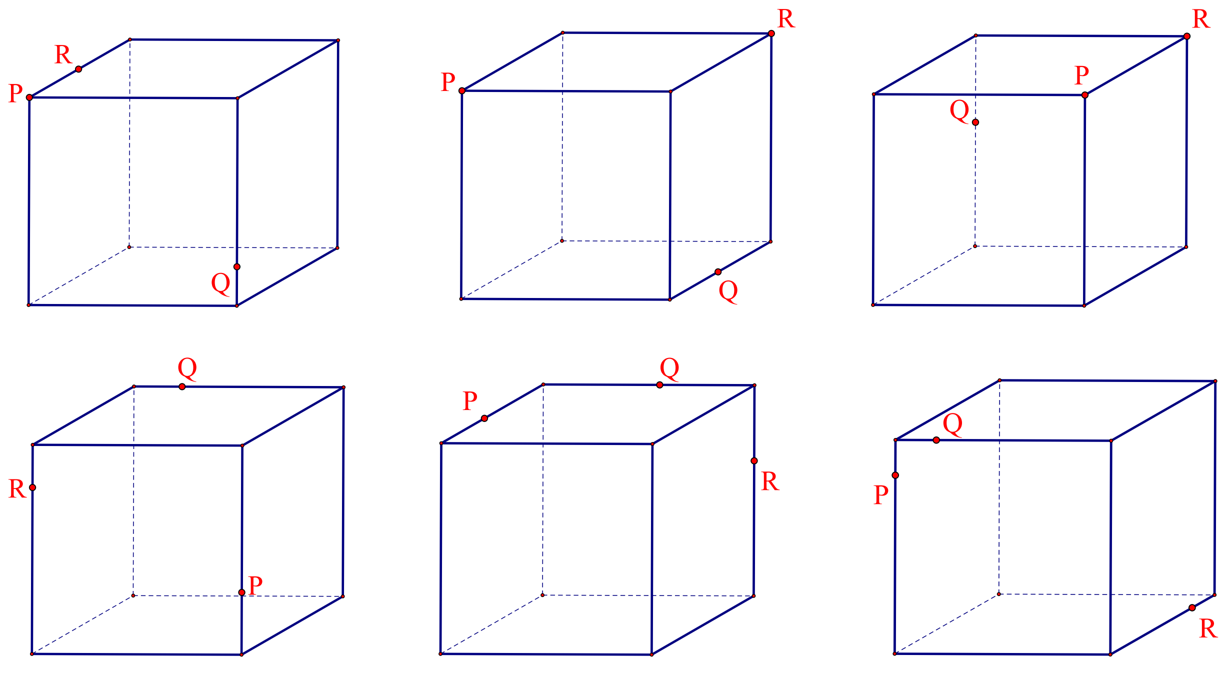
Potražite pomoć tehnologije.

Korak 1

U programu dinamične geometrije nacrtajte kocku. <u>Koraci:</u> Nacrtajte vrhove A, B, D u donjoj bazi. Vrh A_1 možete dobiti rotacijom vrha B oko A za kut od 90°. Vrh B_1 možete dobiti kao sjecište paralela ili pomoću translacije. Stražnju plohu možete dobiti translacijom prednje za vektor $\overrightarrow{AD}$. Kad je kocka konstruirana, sakrijte sve pomoćne linije i spremite korake crtanja kocke kao alat za crtanje kocke: označite kocku, u izborniku s lijeve strane odaberite korisnički alat , *kreirajte novi alat*.

Korak 2

Koristeći alat za crtanje kocke, nacrtajte šest kocaka i na njima označite točke P, Q, R kao na slici.

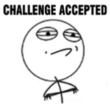


Korak 3

Konstruirajte presjek svake kocke ravninom PQR.

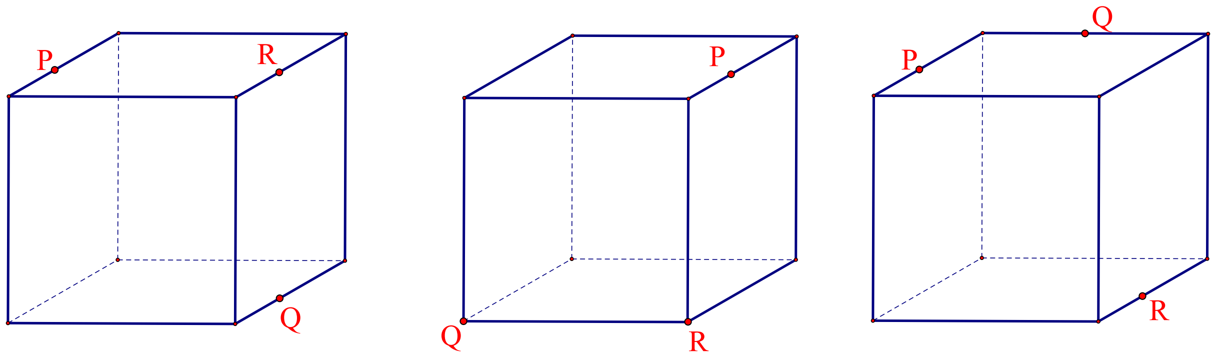
Kako bi to riješila teorija?

Opišite i obrazložite koji skupovi točaka mogu nastati kad kocku presječemo ravninom.



Možemo li više?

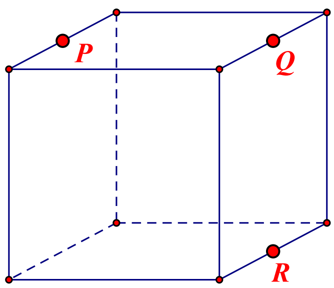
Nacrtajte kocku, konstruirajte presjek kocke ravninom *PQR*. Mijenjajte položaj točaka *P*, *Q*, *R*. Kako se mijenja presjek? Vode li koraci u konstrukciji uvijek rješenju?

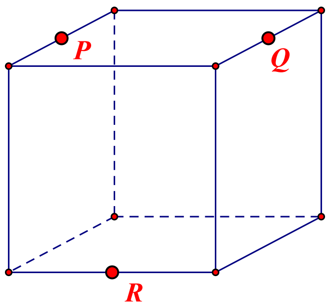


Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Neka su točke *P*, *Q*, *R* polovišta bridova na kojima se nalaze. Odredite površinu presjeka kocke i ravnine *PQR*.

a. 

b. 

Zadatak 2.

Gospodin Kockica djeci je odlučio napraviti ljetnu kućicu za igru. Kao temelje postavio je čvrstu ploču kvadratnog oblika dimenzija 3 m × 3 m, te u vrhovima temelja uzdignuo stupove visine 3 m. No, zbog krošnje drveta ispod kojeg se nalazi kućica nije mogao postaviti ravni krov na najvećoj visini. Odlučio je čvrstu tkaninu privezati o stupove i napraviti krov. Dopuštene visine bile su 2.8 m na prednjim stupovima, a na stražnjim samo 1.6 m. Odredite površinu tkanine potrebne za završetak kućice gospodina Kockice.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Gusić, J.; Mladinić, P.; Pavković, B. 2007. *Matematika 2, udžbenik za 2. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*. Školska knjiga. Zagreb.

Dakić, B.; Elezović, N. 2014. *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola*. Element. Zagreb.

2.2. Presjek piramide ravninom

Što ćemo raditi?

Određivat ćete presjeke piramida s ravninom te računati površine presjeka.

U čemu je problem?

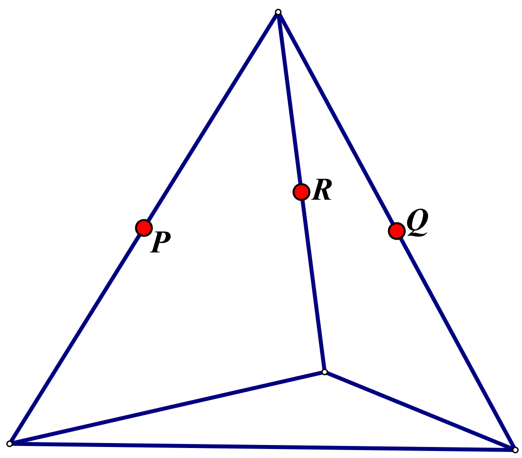
Koji sve geometrijski likovi mogu nastati kao presjek ravnine i pravilne trostrane piramide, pravilne četverostrane piramide, pravilne šestrostrane piramide…?

Trostrana piramida

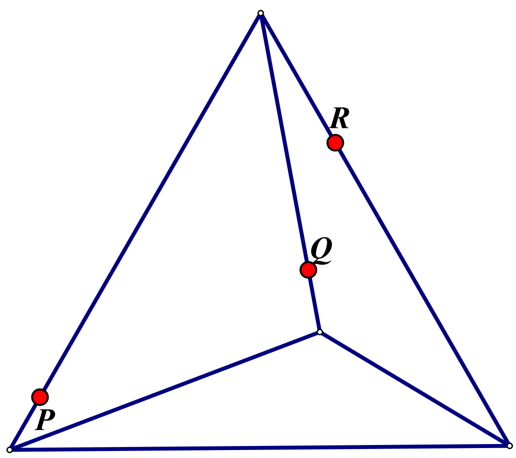
Kako to izgleda?

Podijelite se u **četveročlane** skupine.

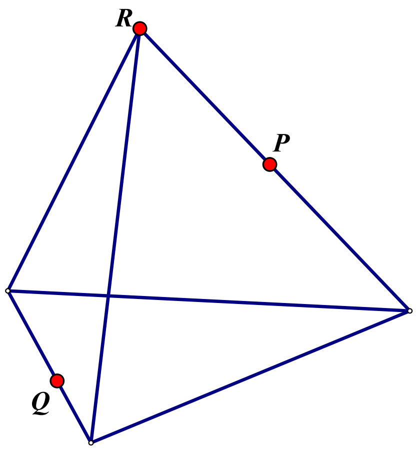
Oblikujte plastelin u četiri trostrane piramide. Postavite malo plastelina druge boje u položaj točaka P, Q, R kao na slici. Nožićem odrežite dio piramide tako da rez prolazi zadanim točkama.



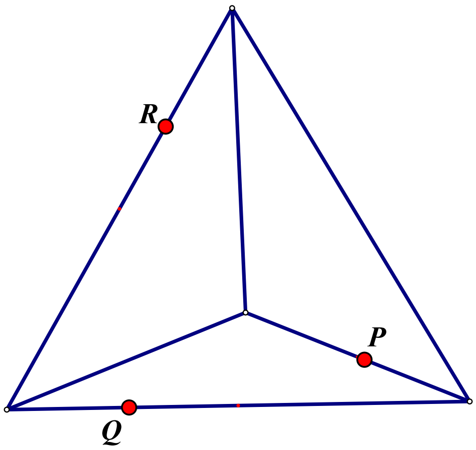
a.



b.



c.



d.

Možete li pretpostaviti?

Koji sve geometrijski likovi mogu nastati presjekom trostrane piramide ravninom?

Potražite pomoć tehnologije.

Otvorite dokument Piramide. Kopirajte tri puta stranicu trostrana. Nacrtajte točke kao na fizičkim modelima. Konstruirajte presjek. Postavite točke koje nisu vrhovi u polovišta bridova kojima pripadaju. Opišite presjek. Promotrite posebno što se događa s pravcima u d. zadatku kad točke P, Q, R približavate polovištu. Je li moguće na isti način konstruirati presjek kad su točke u polovištima? Napravite konstrukciju posebno za ovaj slučaj.

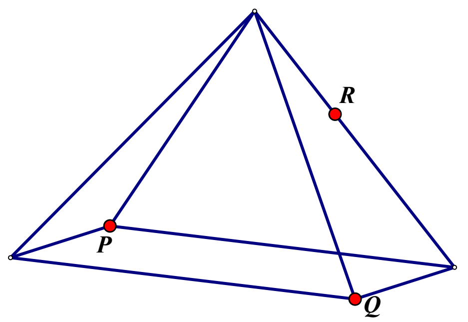
Kako bi to riješila teorija?

Izračunajte površinu presjeka piramida iz zadataka a., c. i d. ako su duljine svih bridova piramide 10 cm, a točke P, Q, R koje nisu vrhovi polovišta su bridova.

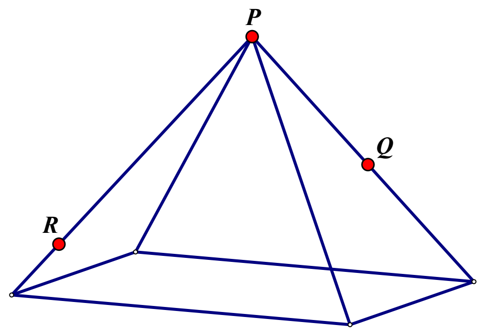
Četverostrana piramida

Kako to izgleda?

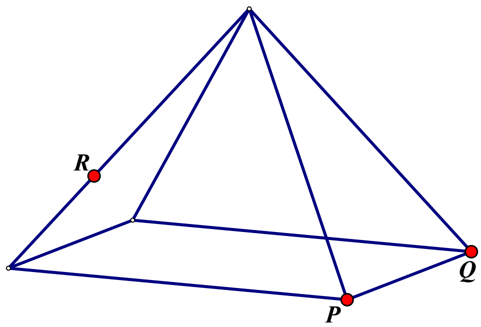
Oblikujte plastelin u četiri pravilne četverostrane piramide. Postavite malo plastelina druge boje u položaj točaka *P*, *Q*, *R* kao na slici. Nožićem odrežite dio piramide tako da rez prolazi zadanim točkama.



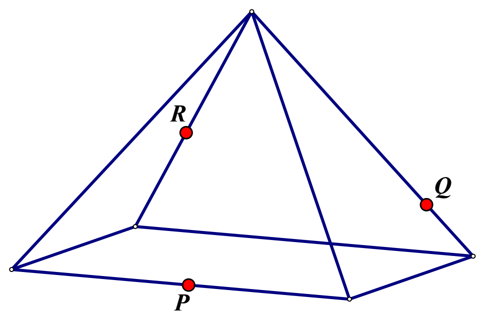
a.



b.



c.



d.

Potražite pomoć tehnologije.

Otvorite dokument *Piramide.gsp*. Kopirajte tri puta stranicu **četverostrana**. Nacrtajte točke kao na fizičkim modelima. Konstruirajte presjek. Postavite točke koje nisu vrhovi u polovišta bridova kojima pripadaju. Opišite presjek. Promotrite posebno što se događa s pravcima u d. zadatku kad točke *P*, *Q*, *R* približavate polovištu. Je li moguće na isti način konstruirati presjek kad su točke u polovištima? Napravite konstrukciju posebno za ovaj slučaj.

Kako bi to riješila teorija?

Izračunajte površinu presjeka piramida iz zadataka a., b. i c. ako su duljine svih bridova piramide 10 cm, a točke *P*, *Q*, *R* koje nisu vrhovi polovišta su bridova.

Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Zadana je pravilna četverostrana piramida čiji su svi bridovi duljine 8 cm. Kolika je površina presjeka ravninom paralelnoj osnovki koja je od vrha piramide udaljena za 3 cm?

Zadatak 2.

Arhitekt Neboderko radio je nacrt za neobičnu zgradu u Las Vegasu oblika pravilne šesterostrane piramide s bridom baze od 50 metara i visinom od 100 metara. Investitor je u posljednji trenutak odlučio napraviti heliodrom na vrhu zgrade. Kolika će biti nova visina zgrade ako je poznato da je heliodrom krug promjera 15 metara koji mora stati na vrh zgrade?

Kako smo radili i što smo naučili?

2.3. Modeliranje tijelima

Što ćemo raditi?

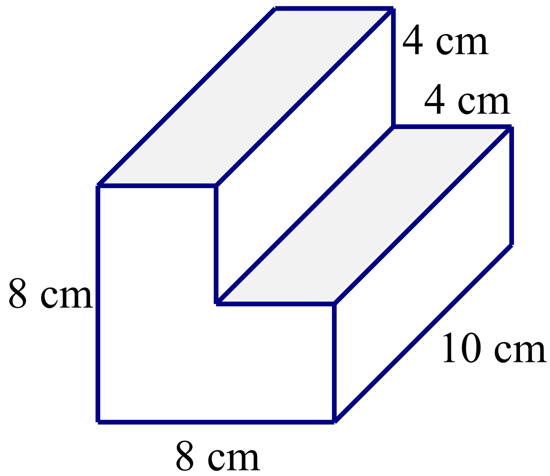
U ovoj ćete aktivnosti računati oplošje i obujam složenoga geometrijskog tijela.

U čemu je problem?

Znamo izračunati oplošje i obujam geometrijskih tijela, ali kako računati oplošje i obujam tijela koje je složeno od geometrijskih tijela.

Kako to izgleda?

Promotrite geometrijsko tijelo sa skice. Od kojih je tijela sastavljeno?

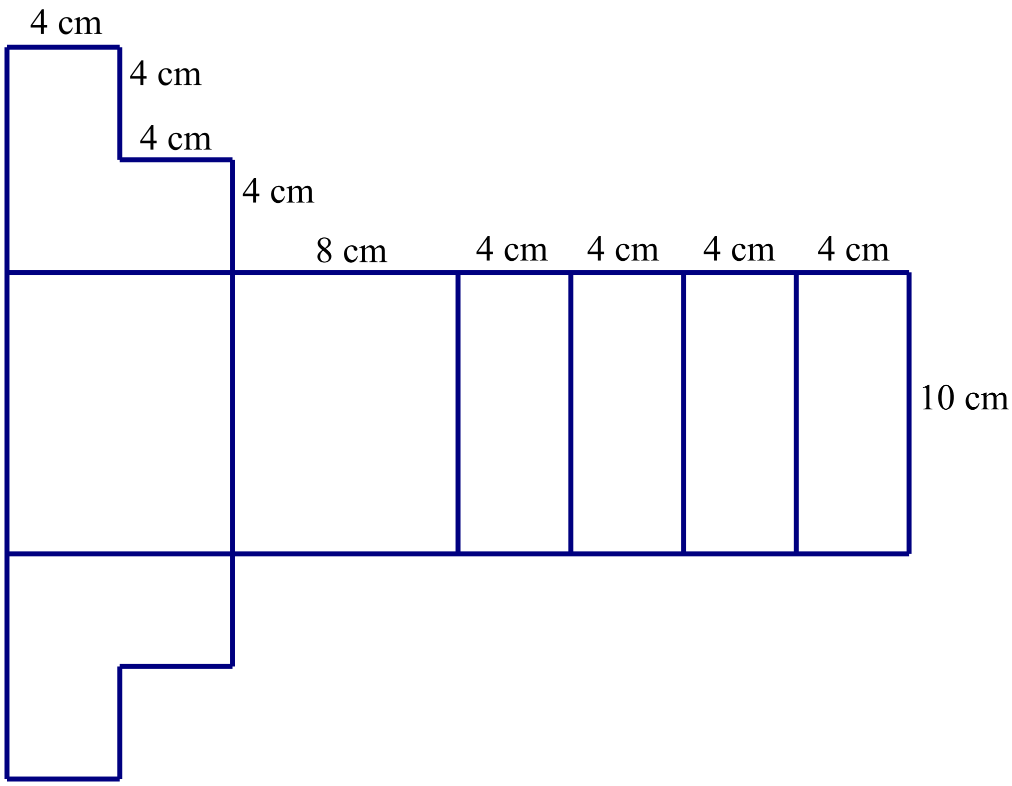


Možete li pretpostaviti?

Proučite nacrtano tijelo. Na koje načine možemo izračunati oplošje i obujam tijela?

Napravite model.

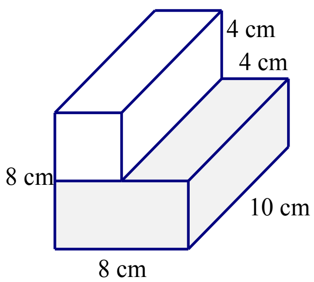
Jedna je ideja da nacrtamo mrežu tijela i računamo površine.



$$O=10\cdot(8+8+4+4+4+4)+2\cdot 8^2-2\cdot 4^2=416\,\text{cm}^2.$$

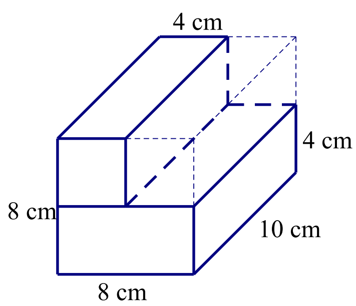
Za računanje obujma možemo:

a. zbrajati obujme tijela iz kojih je tijelo složeno:



računamo: $V=8\cdot 10\cdot 4+4\cdot 10\cdot 4=480\,\text{cm}^3$

b. od obujma „velikog“ tijela oduzeti obujam tijela koje nedostaje:

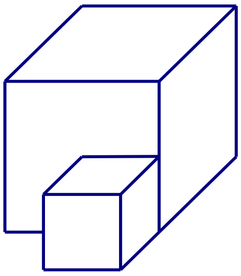


$V=8\cdot 10\cdot 8-4\cdot 10\cdot 4=480\,\text{cm}^3$

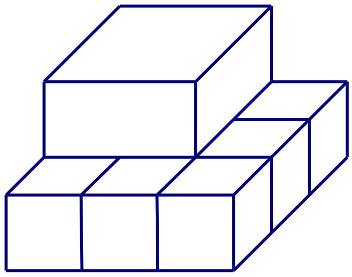
Primijenite naučeno.

1. Sljedeća tijela nastala su od kocaka duljine brida 4 cm i 2 cm. Izračunajte njihova oplošja i obujme.

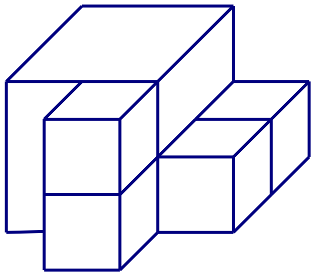
a.



b.

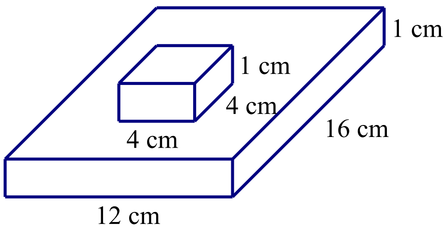


c.

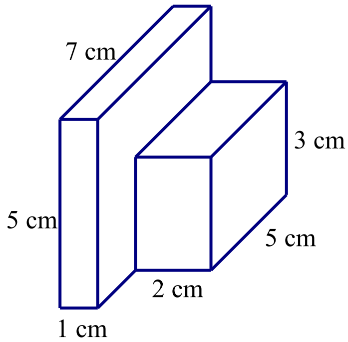


2. Izračunajte oplošje i obujam složenih tijela sa skica:

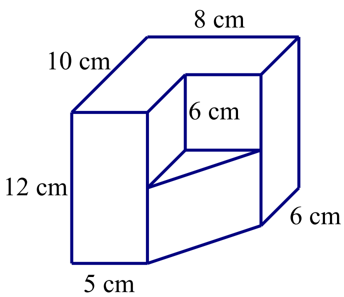
a.



b.



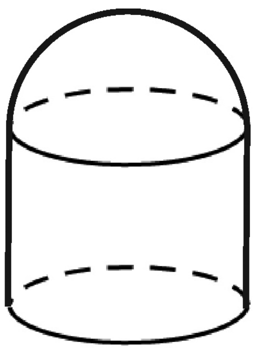
c.

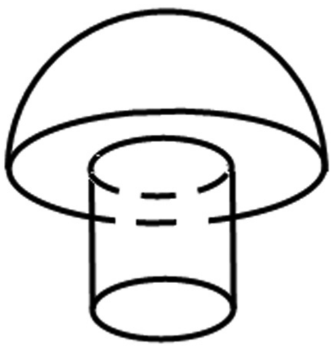


3. Na valjak je stavljena polusfera kao na skici. Izračunajte oplošje i obujam dobivenoga tijela ako je:

a. promjer valjka 12 cm i visina valjka 9 cm

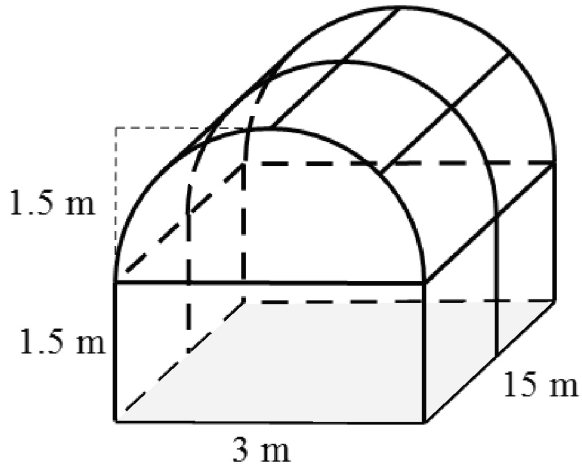
b. polumjer valjka 5 cm, visina valjka 14 cm i polumjer polusfere 12 cm.





4. Kapsula lijeka ima oblik valjka visine 19 mm i polumjera 3.5 mm s dvjema polusferama na krajevima. Koliki je kapacitet (obujam) kapsule?

5. Koliko je materijala potrebno za plastenik sa slike? Napomena: plastenik nema dno.



Možemo li više?

Procijenite volumen mješalice za beton sa slike ako pretpostavimo da je sastavljena od valjka i dvaju krnjih stožaca i znamo da je promjer valjka 2 m.

http://www.njuskalo.hr/image-bigger/kamioni-mikseri/prodajemo-beton-mikser-man-fe-310-a-7m3-karena-2002-god-slika-62883242.jpg

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

Haese Mathematics: Mathematics for the International Student 10E (MYP 5 Extended)

2.4. Matematika egipatskih piramida

Što ćemo raditi?

Istražit ćete zanimljiva matematička svojstva velikih piramida u Egiptu.

U čemu je problem?

Piramide u Gizi stoljećima su predmet divljenja. Jeste li ikada razmišljali o njihovim proporcijama, oplošju, volumenu, unutrašnjosti? Stari su Egipćani sve precizno matematički izračunali.

Engleski je matematičar i egiptolog John Taylor (1781. – 1864.) zaključio da je Keopsova piramida bila zamišljena i građena tako da je površina svakog jednakokračnog trokuta njezina plašta jednaka površini kvadrata kojemu je stranica jednaka visini piramide. Druga je Taylorova pretpostavka da je opseg baze jednak opsegu kružnice čiji je polumjer jednak visini piramide. Zanima nas jesu li te pretpostavke točne, vrijedi li isto svojstvo i za preostale dvije piramide i postoje li još neke pravilnosti vezane uz ove piramide.

Kako to izgleda?

U sljedećoj su tablici dane dimenzije triju velikih piramida.

Naziv	Keopsova	Kefrenova	Mikerinova
Brid osnovke a	230.36 m	215.26 m	105.50 m
Bočni brid b	219.23 m	209.44 m	99.31 m

Možete li pretpostaviti?

Možete li bez računanja procijeniti je li Taylor bio u pravu?

Napravite model.

Podijelite se u šest skupina: po dvije skupine bave se Keopsovom, po dvije Kefrenovom i po dvije Mikerinovom piramidom.

Nacrtajte mrežu i izradite fizički model pojedine piramide u određenom mjerilu, npr. 1 : 2500. Na modelu izmjerite potrebne veličine i provjerite vrijedi li prva Taylorova pretpostavka.

Potražite pomoć tehnologije.

Otvorite dokument *Egipatske piramide.gsp*. Unesite duljine brida osnovke i bočnog brida piramide koju proučava vaša skupina. Pritisnite *nacrtaj*. Prikazat će se piramida u mjerilu 1 : 2500.

- Izmjerite duljinu stranice $\overline{AB}$. Izračunajte duljinu $\tilde{a}$ koja u prirodi, s obzirom na zadano mjerilo, odgovara duljini stranice $\overline{AB}$ (koristite *Broj*, *Računalo*). Jeste li dobili zadanu duljinu a brida osnovke piramide? Zašto? Pomičite točke *nagib*, *ljuljanje* i *vrtnja* dok ne postavite piramidu u položaj u kojem ćete što točnije dobiti duljinu brida osnovke piramide. Zapišite tako dobiveni broj $\tilde{a}$ u tablicu.
- Na isti način mjerite duljinu bočnog brida $\overline{AV}$ i odredite duljinu $\tilde{b}$ koja u prirodi odgovara toj duljini. Zapišite broj $\tilde{b}$ u tablicu.
- Konstruirajte visinu piramide $\overline{VN}$ i pomoću nje odredite duljinu visine piramide u prirodi ($\tilde{h}$). Zapišite broj $\tilde{h}$ u tablicu.
- Konstruirajte kut između pobočke i osnovke. Izmjerite njegovu veličinu. Postavite piramidu u položaj u kojem ćete dobiti pravu veličinu kuta.

	Duljina brida osnovke $\tilde{a}$	Duljina bočnog brida $\tilde{b}$	Duljina visina piramide $\tilde{h}$	Omjer $\tilde{a}:\tilde{h}$	Kut između pobočke i osnovke
____________ piramida					

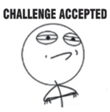
Kako bi to riješila teorija?

- Koristeći **zadane** podatke a i b za piramidu koju proučava vaša skupina izračunajte i zapišite u tablicu:

	Duljina brida osnovke a	Duljina bočnog brida b	Duljina visina piramide h	Omjer $a:h$	Kut između pobočke i osnovke	Visina pobočke v	Površina pobočke
______________ piramida							

Usporedite dobivene vrijednosti s vrijednostima iz prethodne aktivnosti.
Vrijede li Taylorove pretpostavke za vašu piramidu?

- Pretpostavimo da za neku piramidu čija je visina y, a osnovni brid x vrijedi prva Taylorova pretpostavka.
  - Zapišite formulu za površinu pobočke. Izrazite sve veličine u formuli pomoću x i y.
  - Izjednačite površinu pobočke s površinom kvadrata čija je stranica x. Dobili ste vezu između veličina x i y.
  - Riješite se korijena. S obzirom na nepoznanicu y, kakvu ste jednadžbu dobili? Riješite jednadžbu po y (u rješenju će se pojaviti x). Zapišite rješenje egzaktno, ne računajući približne vrijednosti.
  - Izračunajte kut između pobočke i osnovke ove piramide.
  - Konstanta proporcionalnosti zlatnog reza je $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pojavljuje li se ta konstanta u formuli za y koju ste dobili? Jesu li osnovni brid i visina u omjeru zlatnog reza?
- Promotrite još jednom piramidu koju je proučavala vaša skupina. Je li bila građena po pravilu zlatnog reza, odnosno jesu li osnovni brid i visina u omjeru zlatnog reza?



Možemo li više?

- Pretpostavimo da za neku piramidu čija je visina y, a osnovni brid x vrijede obje Taylorove pretpostavke. Izrazite iz prve i druge pretpostavke omjer osnovnog brida i visine, a zatim dobivene omjere izjednačite. Dobit ćete približnu vrijednost broja π. Izračunajte relativnu pogrešku koju su napravili Egipćani.

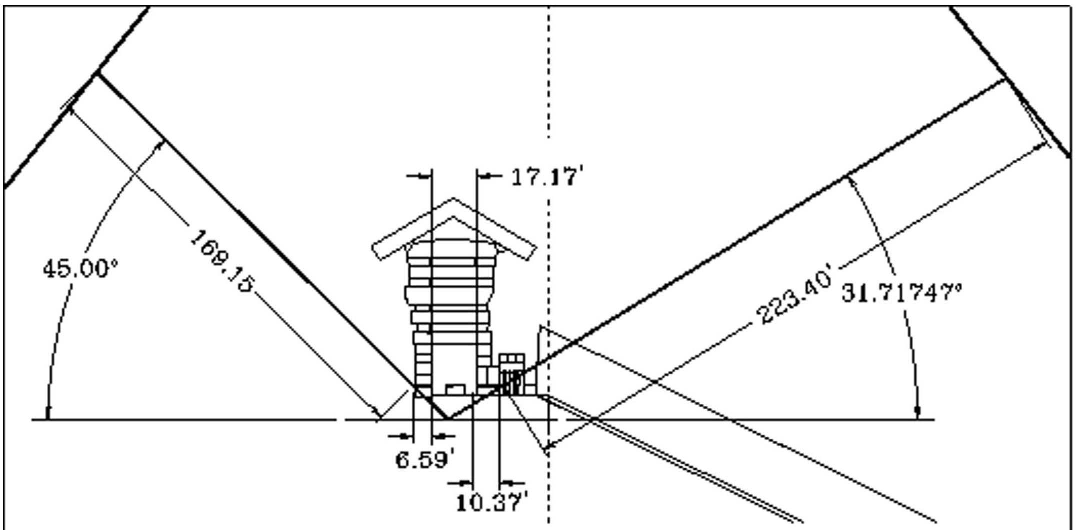
Primijenite naučeno.

Zadatak 1.

Pretpostavlja se da na dubini od 21 m, točno ispod središta Kefrenove piramide, postoji još jedna skrivena prostorija. Istraživači žele iskopati tunel prema toj prostoriji, okomito na pobočku piramide. Gdje moraju početi kopati ako žele kopati direktno prema skrivenoj prostoriji? Koliko će minimalno dana kopati ako koristeći suvremenu tehnologiju, dnevno mogu iskopati tunel duljine 3 metra?

Zadatak 2.

Na kojoj se udaljenosti od osnovke piramide nalazi faraonova grobnica ako je od južne strane udaljena 169.15 stopa pod kutom od 45°, a od sjeverne strane 223.4 stopa pod kutom od 31.71747° kao na slici (slika je preuzeta s http://www.samuellaboy.com/English/chap3.htm)?



VENTILATION SHAFTS – KING'S CHAMBER

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

http://www.samuellaboy.com/English/chap3.htm (15.3.2016.)

http://www.val-znanje.com/index.php/tekstovi/znanost/1159-dimenzije-i-proporcije-piramida-u-gizi-egipat (15.3.2016.)

http://whistleralley.com/GSP/perspective/perspective.htm (15. 3. 2016.)

2.5. Polupravilni poliedri

Što ćemo raditi?

Upoznat ćete polupravilne poliedre i njihova svojstva.

U čemu je problem?

Na redovnoj ste nastavi već upoznali pet pravilnih poliedara ili Platonova tijela. Je li nogometna lopta Platonovo tijelo? Znamo da za Platonova tijela vrijedi Eulerova formula koja daje vezu između broja vrhova, broja bridova i broja strana. Vrijedi li slična formula za nogometnu loptu? Postoje li još neki poliedri koji imaju svojstva kao nogometna lopta?

Kako to izgleda?

Pomoću slike ili prave nogometne lopte izbrojite vrhove, bridove, strane. Koji su mnogokuti strane nogometne lopte? Jesu li međusobno sukladni? Što vrijedi za duljine bridova?

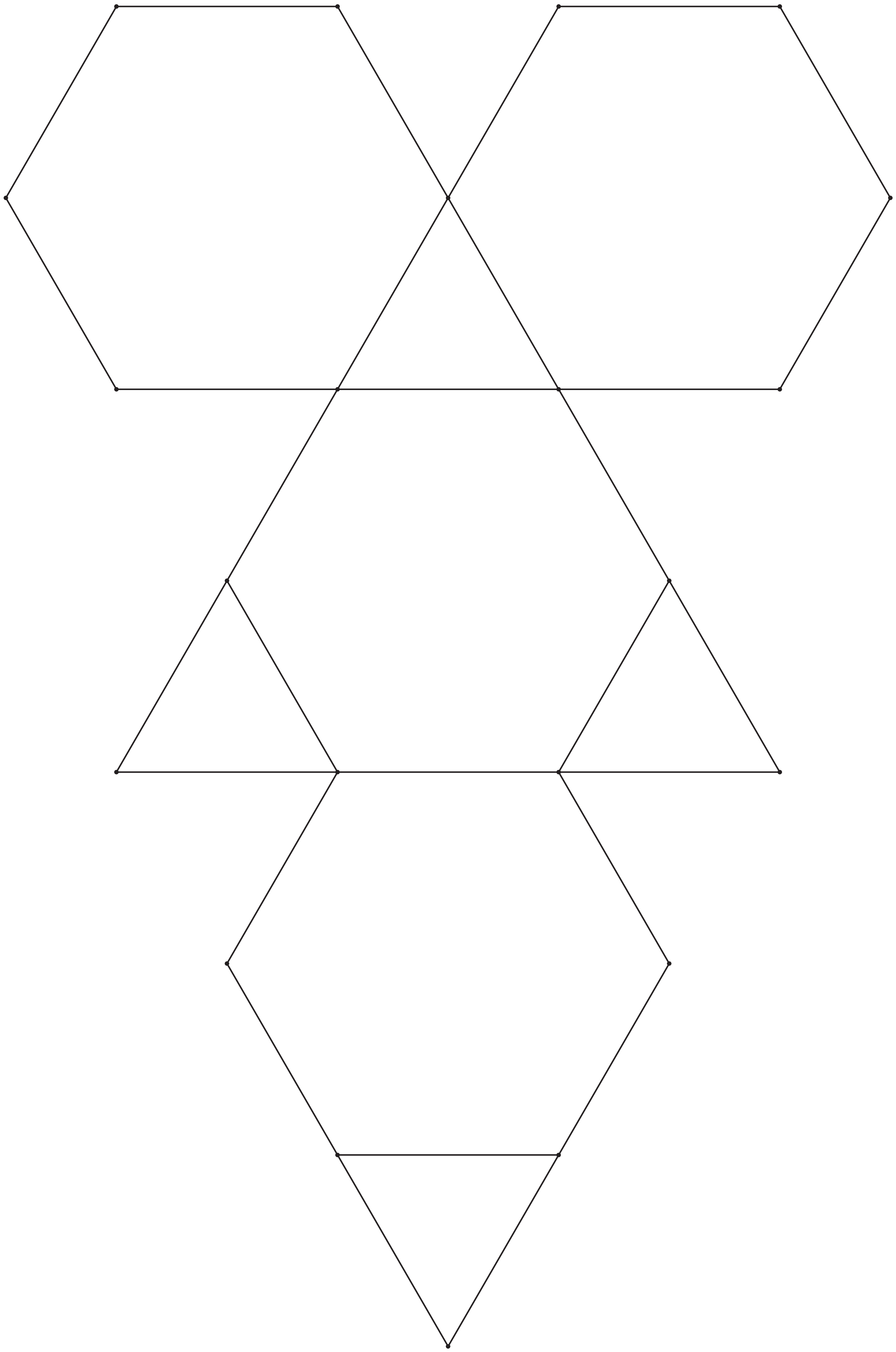
Polupravilni poliedri imaju bridove jednakih duljina, ali sve strane nisu međusobno sukladni mnogokuti.

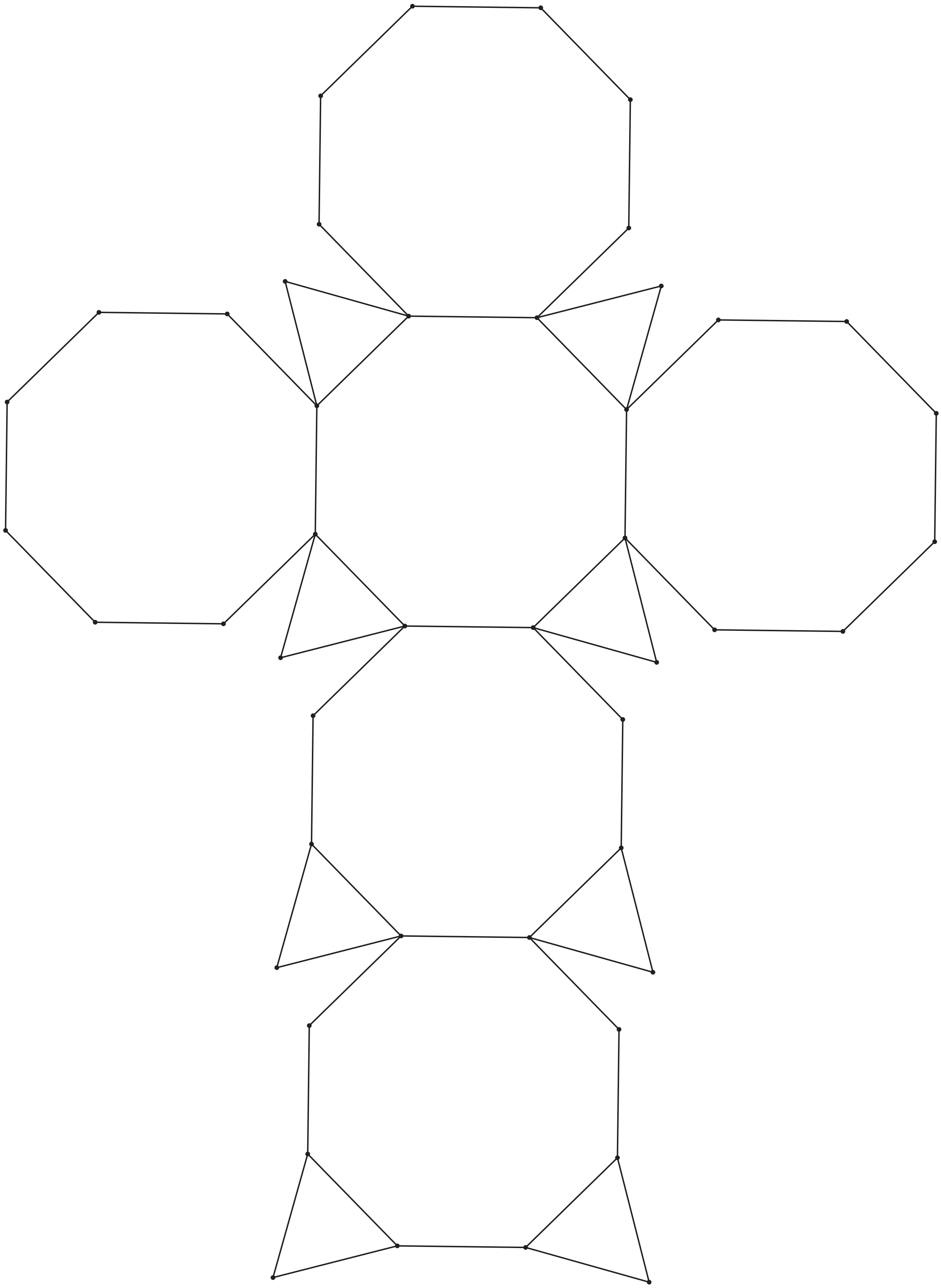
Možete li pretpostaviti?

Iz kojeg je Platonova tijela i na koji način nastala nogometna lopta? Što bismo na isti način dobili iz ostalih Platonovih tijela? Što bi nastalo iz tetraedra?

Napravite model.

Napravite od papira model krnjeg tetraedra i krnjeg heksaedra. Izbrojite strane, bridove i vrhove. Provjerite vrijedi li Eulerova formula.





Potražite pomoć tehnologije.

Otvorite dokument *Polupravilni poliedri.gsp*; *krnji tetraedar*. Pomičite točke *nagib*, *ljuljanje* i *vrtnja*. Postavite model krnjeg tertaedra od papira u isti položaj kao na slici. Mijenjajte položaje. Upišite duljinu stranice tetraedra 9 cm. Postavite krnji tetraedar u položaj u kojem je neki od trokuta i neki od šesterokuta u pravoj veličini. Izmjerite površine i izračunajte mu oplošje (koristite *Broj*, *Računalo*).

Kako bi to riješila teorija?

Polupravilni poliedri imaju različite vrste pravilnih poligona kao strane. Nazivaju se još i Arhimedova tijela po starogrčkome matematičaru Arhimedu iz Sirakuze (287. – 212. pr. Kr.). Postoji 13 Arhimedovih tijela i mogu se podijeliti u tri grupe. Prva grupa dobiva se odsijecanjem vrhova Platonovih tijela i tu spada nogometna lopta kao krnji ikosaedar. Prisjetite se broja strana, bridova i vrhova ikosaedra pa nadopunite:

U jednom se vrhu ikosaedra sastaje ____ bridova pa odsijecanjem jednog vrha ikosaedra nastaje pravilni ________________ . Odsijecanjem svih ____ vrhova ikosaedra nastat će ____ pravilnih ____________________. Jedna strana ikosaedra je ____________ pa odsijecanjem sva ___vrha na toj strani nastaje pravilni ___________________. Odsijecanjem svih vrhova, od ___ strana ikosaedra nastat će ___ pravilnih ________________. Stoga krnji ikosaedar ima ____ strane.

Odsijecanjem jednog vrha ikosaedra nastaje ____ vrhova krnjeg ikosaedra pa će odsijecanjem svih ____ vrhova ikosaedra nastati ____ vrhova ikosaedra.

Prebrojimo bridove. Krnji ikosaedar ima ____ strana koje su peterokuti što daje ____ bridova. Preostaju još bridovi strana koje su šesterokuti. Od šest bridova šesterokuta ____ brida su zajednički s peterokutima pa ste ih već računali, a ____ sa šesterokutima pa ih treba još dodati. Krnji ikosaedar ima ____ strana koje su šesterokuti što iznosi ____ bridova, a kako smo svaki od bridova zajedničkih šesterokutima računali ____ puta, broj novih bridova na šesterokutnim stranama je ____. Stoga krnji ikosaedar ima ukupno____ bridova.

Provjerite vrijedi li Eulerova formula za krnji ikosaedar.

Možemo li više?

Zadatak 1.

Izračunajte oplošje krnjeg tetraedra koji je nastao iz tetraedra čija je duljina stranice 9 cm. Usporedite rješenje s rezultatom dobivenim uz pomoć tehnologije.

Zadatak 2.

Izvedite formulu za oplošje i volumen krnjeg tetraedra koji je nastao iz tetraedra čija je duljina stranice a.

Zadatak 3.

Izvedite formulu za oplošje i volumen krnjeg heksaedra koji je nastavo iz heksaedra čije je duljina stranice a.

Zadatak 4.

Izračunajte kut između dviju šesterokutnih strana u krnjem tetraedru. Postavite krnji tetraedar u dokumentu Polupravilni poliedri u položaj u kojem se taj kut vidi u pravoj veličini pa dobiveni kut provjerite mjerenjem.

Zadatak 5.

Izračunajte kut između dviju trokutnih strana u krnjem tetraedru. Dobiveni kut provjerite mjerenjem u dokumentu Polupravilni poliedri.

Primijenite naučeno.

Potražite gdje se u prirodi pojavljuju Arhimedova tijela.

Okrijte što su to izoedri u kristalografiji. Od kojih se poligona sastoji kristal kuprita?

Pronađite slike mikroorganizama radiolarije. Strukturu kojeg poliedra imaju njihova tijela?

Potražite kako se nazivaju i kako izgledaju preostala Arhimedova tijela.

Kako smo radili i što smo naučili?

Literatura

časopis *Matematika i škola,* broj 47., godina 10./2008., stranica 94.-96.

https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/sem1314/5a-Platonova.pdf (posjećeno 3.3.2016.)

http://www.grad.hr/geomteh3d/posteri/polupravilni_poster.pdf (posjećeno 3.3.2016.)

http://whistleralley.com/polyhedra/platonic.htm (posjećeno 3.3.2016.)

http://lrt.ednet.ns.ca/PD/geometry7ch7/index.shtml (posjećeno 3.3.2016.)

http://www.proven.hr/sketchpad/radovi/3D_galerija.gsp (posjećeno 3.3.2016.)

http://www.proven.hr/sketchpad/radovi/Ikosaedar.gsp (posjećeno 3.3.2016.)

http://whistleralley.com/GSP/perspective/perspective.htm (posjećeno 3.3.2016.)

Sadržaj